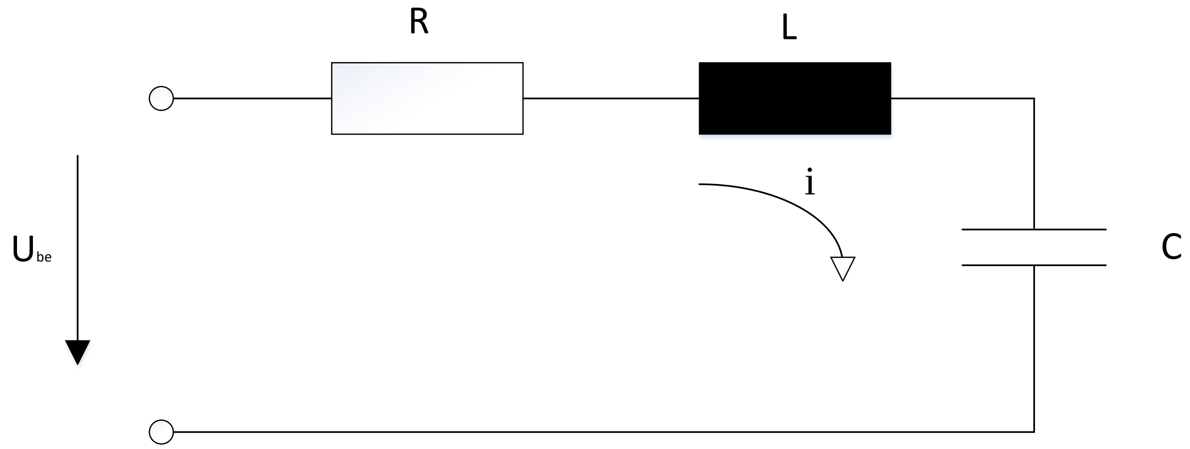
Első gyakorlat

A gyakorlat célja, hogy megismerkedjünk Matlab-SIMULINK szoftverrel és annak segítségével sajátítsuk el az Automatika c. tantárgy gyakorlati tananyagát. Ezen a gyakorlaton ismertetésre kerül egy fizikai rendszer időtartománybeli leírása, annak modellezése szoftveresen. Továbbá ugyanazon feladaton keresztül megvalósításra kerül az operátor tartománybeli és állapot változós leírásmód is.

Időtartománybeli leírás és annak modellezése

Tekintsük az alábbi fizikai rendszert:



Először felírjuk az időtartománybeli egyenletet a huroktörvény segítségével. A hurok törvény azt mondja ki, hogy egy zárt hurokban a feszültségek előjeles összege zérus.

„L”, „R” és „C” legyen egységnyi nagyságú.

Ellenálláson eső feszültség: $R \cdot i$

Induktivitáson eső feszültség: $L \cdot \frac{di}{dt}$

Kondenzátoron eső feszültség: $\frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt$

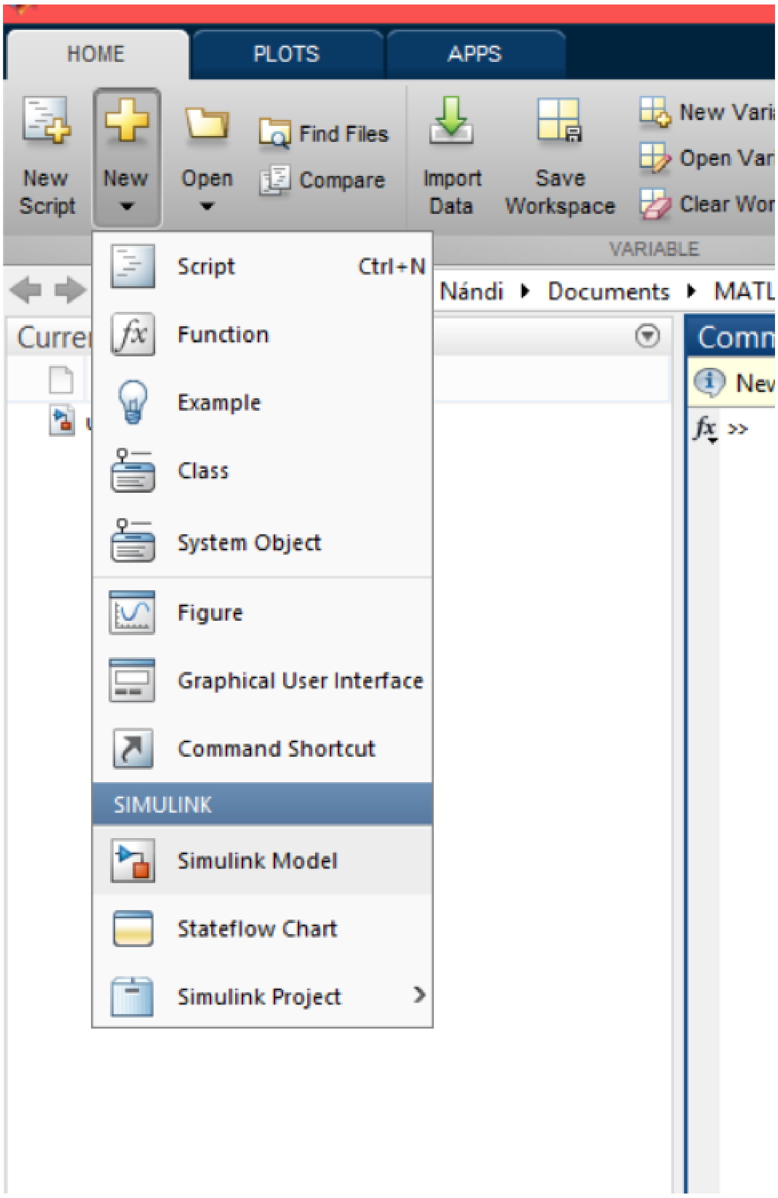
Hurokegyenlet alakja, ha az áram irányával megegyező feszültségeséseket tekintjük pozitívnak:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt - u_{be} = 0 \qquad (0)$$

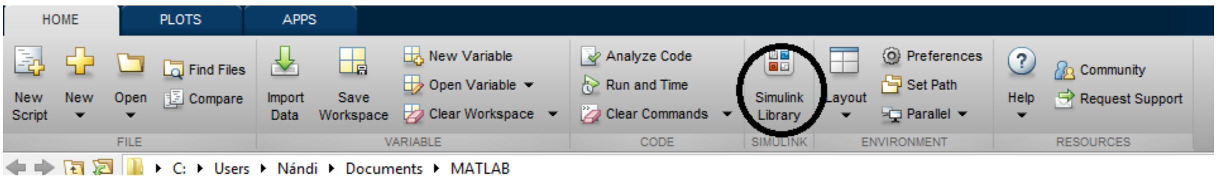
A SIMULINK modell előállításához ki kell fejezni a legmagasabb rendű deriváltat az egyenletből, aminek az alakja a következő:

$$\frac{di}{dt} = \frac{u_{be}}{L} - \frac{1}{C \cdot L} \cdot \int i \cdot dt - \frac{R}{L} \cdot i \qquad (1)$$

A modell megalkotásához nyissuk meg a Matlab-ot és készítsünk egy új Simulink modellt.



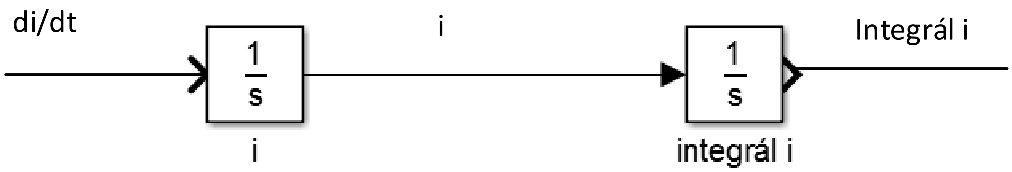
A modellt funkció blokkok segítségével építjük fel, amik a Simulink library-ből érhetőek el.



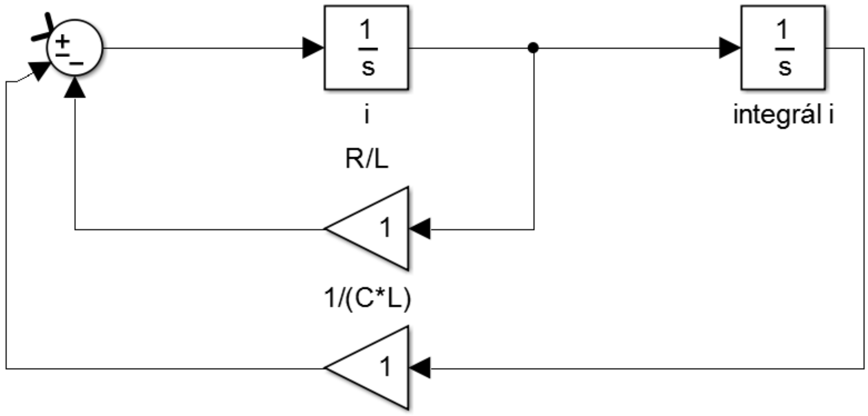
A blokkok be és kimeneteinek száma attól függ, hogy milyen funkciót lát el. A „Source” típusúaknak csak kimenetük van, míg a „scope”-nak csak egy bemenete van, kimenete nincs.

A kapott differenciál-egyenlet előállítását Simulinkben a következőképpen végezzük:

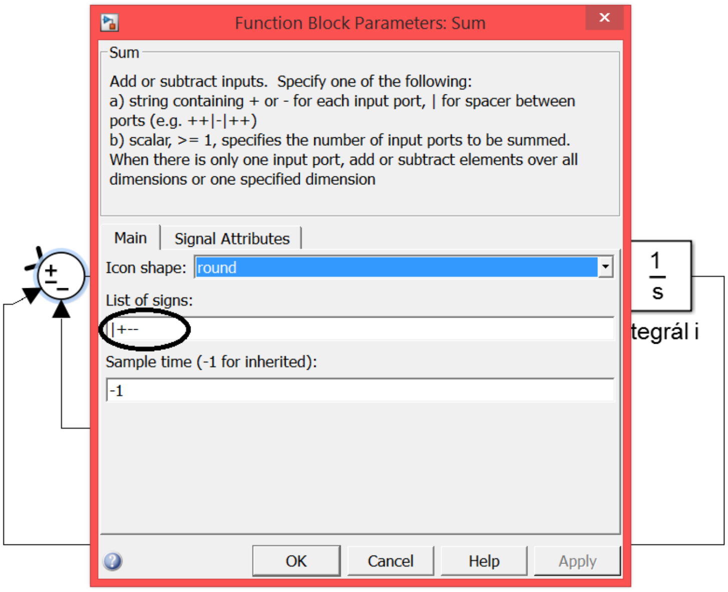
Először legmagasabb rendű derivált integrálásával előállítjuk annak alacsonyabb rendű deriváltjait.



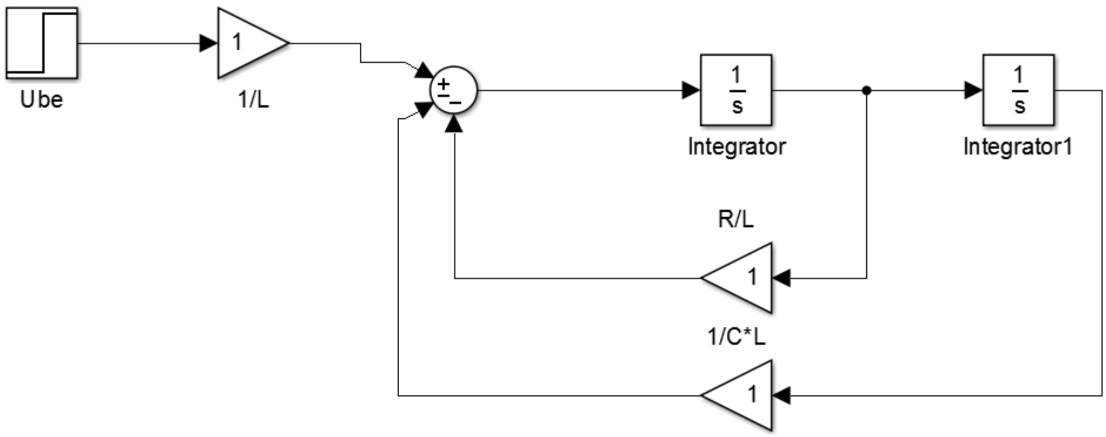
Ezt követően az alacsonyabb rendű deriváltakat megszorozzuk az állandójukkal, majd előjelhelyesen összegezve azokat megkapjuk a di/dt-t.



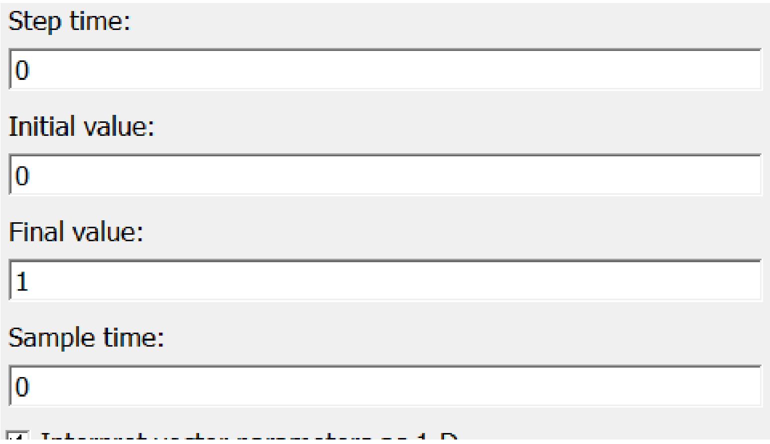
Az összegző blokk beállítási menüje két bal kattintással érhető el.



Az U_0 bemenő jelet egy egységugrás függvénnyel állítjuk elő, amit a „step” nevű blokkal valósítunk meg, ez a „source” almappában található meg.



A „Step” blokk beállítása ugyanúgy dupla bal kattintással történik:

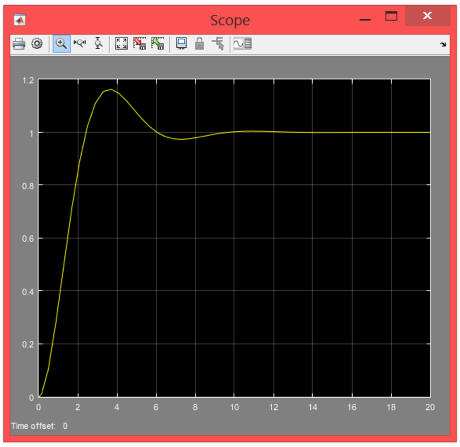


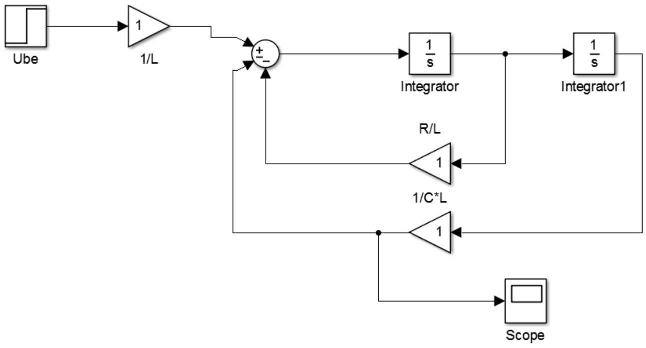
Step time: holtidő

Initial value: ugrás előtti érték (kezdeti érték)

Final value: ugrást követő érték (végérték)

Valamely változó vizsgálatát a „Scope” blokk segítségével végezhetjük el. Jelen esetben a kondenzátoron eső feszültség változását figyeljük.





A következőkben ugyanennek a fizikai rendszernek állítjuk elő az átviteli függvényét Laplace transzformálás segítségével.

A Laplace transzformálás elvégzéséhez szükség van néhány szabály ismeretére, amelyek a következők:

$$£\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) = s \cdot X(s)$$

$$£\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = s^n \cdot X(s)$$

$$£\left(\int x(t)\,dt\right) = \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

$$£(1(t)) = \frac{1}{s}$$

$$£(t \cdot 1(t)) = \frac{1}{s^2}$$

Végezzük el a Laplace transzformációt a (0) egyenleten:

$$£\left(R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt - u_{be}\right) = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s) + \frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s) - U_{be}(s) = 0 \qquad (2)$$

Kimenő jelnek ismét tekintsük a kondenzátoron eső feszültséget, bemenő jelnek a kapocsfeszültséget.

Az átviteli függvény definíciója miatt:

$$Y(s) = \frac{x_{ki}(s)}{x_{be}(s)} = \frac{\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)}{U_{be}(s)}$$

Osszuk el a 2-es egyenletet $\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)$-el.

$$\frac{R \cdot i(s)}{\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)} + \frac{L \cdot s \cdot i(s)}{\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)} + \frac{\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)}{\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)} - \frac{U_{be}(s)}{\frac{1}{C \cdot s} \cdot I(s)} = 0$$

Egyszerűsítsük a kapott egyenletet:

$$R \cdot C \cdot s + L \cdot C \cdot s^2 + 1 - \frac{1}{Y(s)} = 0$$

Rendezzük át az egyenletet

$$\frac{1}{Y(s)} = R \cdot C \cdot s + L \cdot C \cdot s^2 + 1$$

Vegyük mindkét oldal reciprokát:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s + L \cdot C \cdot s^2}$$

A kapott kifejezés egy P2T, azaz két tárolós arányos tag, aminek az általános alakja a következőképpen néz ki:

$$P2T = \frac{A_p}{1 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot s + T^2 \cdot s^2} \qquad A_p = 1 \qquad T = \sqrt{L \cdot C} \qquad \xi = \frac{R \cdot C}{2 \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

Most valósítsuk meg az alaptagokat a „Transfer function” nevű blokk segítségével!

Ennek a blokknak a segítségével bármilyen tag megvalósítható.

Egy tag általános alakja a következő:

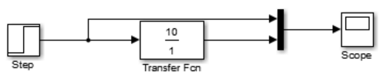
$$\frac{A}{s^i} \cdot \frac{\alpha_n \cdot s^n + \alpha_{n-1} \cdot s^{n-1} + \alpha_1 \cdot s^1 + 1}{\beta_m \cdot s^m + \beta_{m-1} \cdot s^m + \beta_1 \cdot s^1 + 1}$$

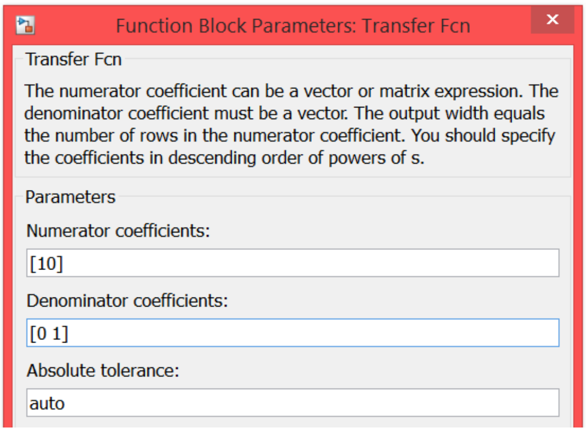
Ha:

- $i = 0$ arányos jelleg
- $i \geq 1$ integráló jelleg
- $i \leq -1$ differenciáló jelleg

Ahol a számlálót a SIMULINK numerátornak a nevezőt pedig denumerátornak hívja.

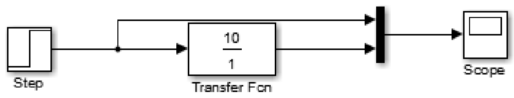
A Transfer Function beállítása ez alapján történik:

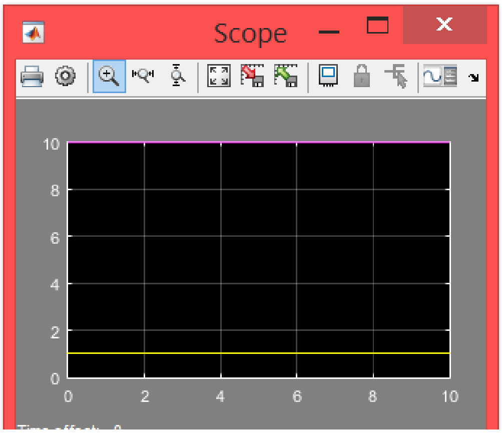




Arányos tag (P) és átmeneti függvénye:

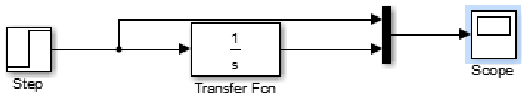
$$Y(s) = A_p$$

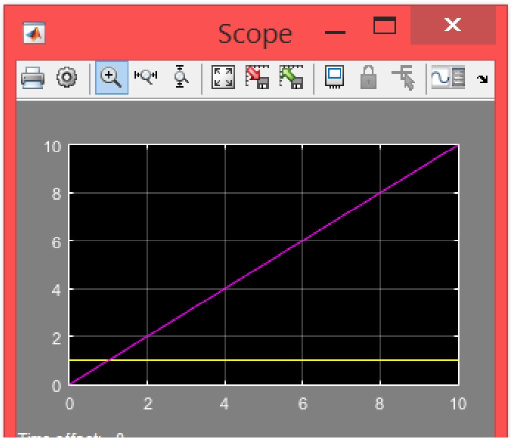




Integráló tag (I) és átmeneti függvénye:

$$Y(s) = \frac{A_I}{s}$$



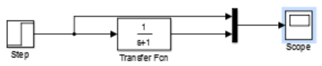


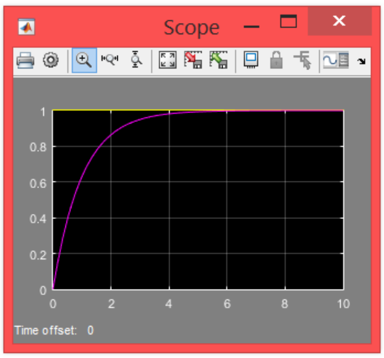
(citromsárga bemenet, lila kimenet)

A differenciáló tag egységugrás bemenetre, végtelen nagyon kimenetet eredményez. Ezért ez nem megvalósítható jelen esetben. Tiszta differenciáló tag a természetben sem fordul elő! $Y(s) = A_D \cdot s$

Arányos egytárolós tag (P1T)

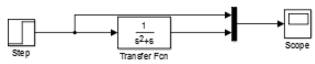
$$Y(s) = \frac{A_p}{1+T\cdot s}$$

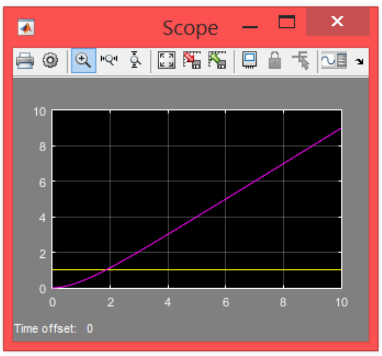




Integráló egytárolós tag (I1T)

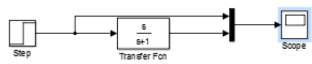
$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{A_i}{1+T\cdot s}$$

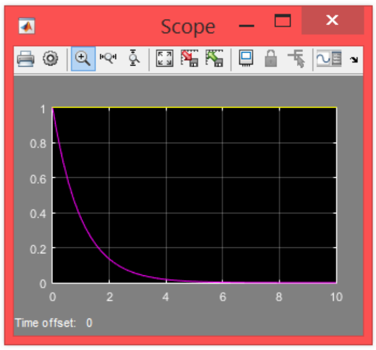




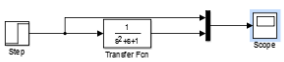
Differenciáló egytárolós tag (D1T)

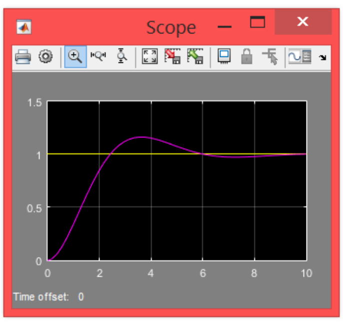
$$Y(s) = s \cdot \frac{A_d}{1+T\cdot s}$$





Két tárolós arányos tag (P2T) $Y(s) = \frac{A_p}{1+2\cdot\xi\cdot T\cdot s+T^2\cdot s^2}$





A következőben az RLC kör állapotegyenleteit írjuk fel.

Az állapot egyenletek általános alakja a következő:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{x} + \bar{\bar{B}} \cdot \bar{u}$$

$$\bar{v} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{x} + \bar{\bar{D}} \cdot \bar{u}$$

A „0” egyenletbe új állapotváltozókat vezetünk be:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \cdot dt - U_{be} = 0$$

A változók indexeit úgy célszerű sorrendben megadni, hogy a legalacsonyabb rendű derivált az „1”-es indexű.

$$\int i \cdot dt = x_1$$

$$i = x_2$$

Írjuk át az egyenletet az állapotváltozókkal:

$$R \cdot x_2 + L \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{C} \cdot x_1 - U_{be} = 0$$

Ezt követően az $\dot{\bar{x}}$ vektort kell felírni

$$\dot{x_1} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{d \int i \cdot dt}{dt} = i = x_2$$

$$\dot{x_2} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{U_{be}}{L} - \frac{1}{C \cdot L} \cdot x_1 - \frac{R}{L} \cdot x_2$$

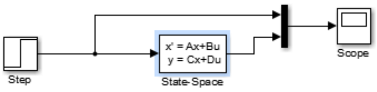
Most már egyszerűen felírhatóak az állapot egyenletek.

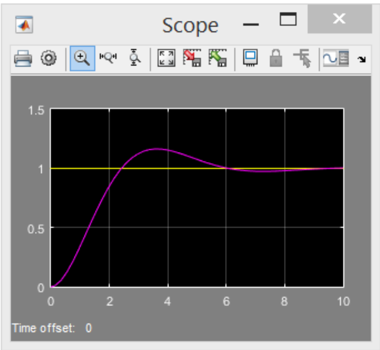
$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{C \cdot L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \cdot u$$

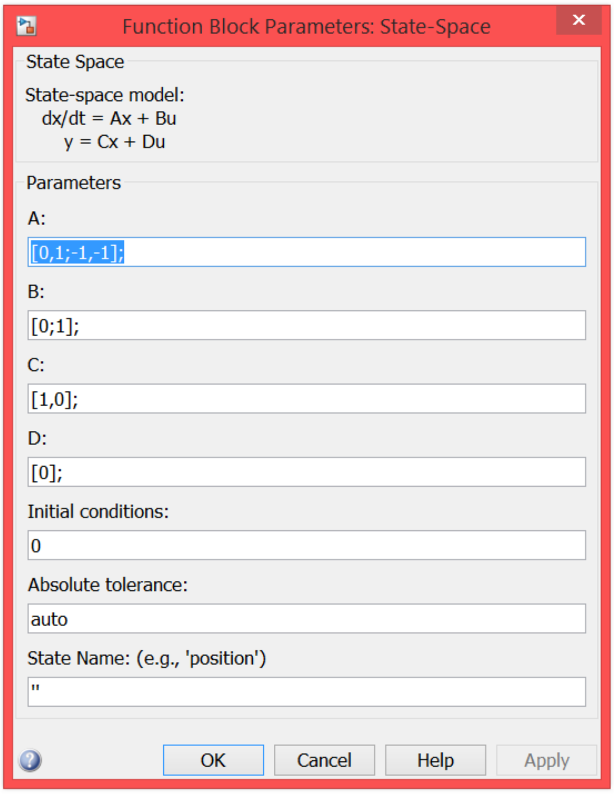
A vizsgált jel változatlanul a kondenzátoron eső feszültség, így a vizsgáló jel állapotegyenlete a következő:

$$v = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0 \cdot u$$

Az állapotegyenletes leírásmód megvalósítása SIMULINK segítségével a következőképpen néz ki:


x' = Ax+Bu
y = Cx+Du
Step
State-Space
Scope


Scope
1.5
1
0.5
0
0
2
4
6
8
10
Time offset: 0


Function Block Parameters: State-Space
State Space
State-space model:
dx/dt = Ax + Bu
y = Cx + Du
Parameters
A:
[0,1;-1,-1];
B:
[0;1];
C:
[1,0];
D:
[0];
Initial conditions:
0
Absolute tolerance:
auto
State Name: (e.g., 'position')
''
OK
Cancel
Help
Apply