3. LOGIKAI FÜGGVÉNYEK GRAFIKUS EGYSZERŰSÍTÉSE ÉS REALIZÁLÁSA

A tananyag célja: a többváltozós logikai függvények grafikus egyszerűsítési módszereinek gyakorlása.

Elméleti ismeretanyag: Dr. Ajtonyi István: **Digitális rendszerek I.** 3.4. fejezet.

Elméleti áttekintés

3.1. Mi a logikai függvények egyszerűsítésének a célja?

3.2. Milyen algebrai összefüggéseken alapul a diszjunktív, ill. konjunktív alakban történő egyszerűsítés?

3.3. Egyszerűsítse algebrai módszerrel az alábbi függvényt:

$$F = \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC + AB\overline{C}\ .$$

3.4. Ábrázolja a fenti függvényt KV táblán, ill. kombinációs táblán.

3.5. Milyen következtetést von le a KV tábla egyeseinek elhelyezkedésére vonatkozóan az összevonási lehetőségek szempontjából?

3.6. Mit ért **algebrailag szomszédos** mintermeken?

3.7. Hogyan helyezkednek el az algebrailag szomszédos mintermek a KV táblán?

3.8. Az előzőek alapján miért előnyösebb a KV táblás megadási módszer, mint a kombinációs tábla?

3.9. Miért van szükség mégis a kombinációs táblára? A szavakban definiált vezérlési feladatot meg tudjuk-e adni közvetlenül KV táblán?

3.10. Miért nehézkes az algebrai egyszerűsítési módszer?

3.11. Mit értünk egy logikai függvény **implikánsán**, ill. **primimplikánsán**?

3.12. Mit értünk **nélkülözhetetlen**, ill. **szükséges primimplikánson**?

3.13. Hogyan történik a primimplikánsok **keresése** a grafikus egyszerűsítésnél?

3.14. Miért a lehető **legnagyobb tömböt** kell kialakítani?

3.15. Mi a követelmény az egyszerűsítésnél a kiinduló, ill. egyszerűsített függvénnyel szemben a függvény 1, ill. 0 helyeire vonatkozóan?

3.16. Hogyan történik a nélkülözhetetlen, ill. szükséges primimplikánsok kiválasztása?

3.17. Mely primimplikánsok lesznek nélkülözhetetlenek?

3.18. Miért célszerű megjelölni azon mintermeket, amelyeken csak **egy hurok** megy keresztül?

3.19. Hogyan történik a **nem teljesen határozott** függvények primimplikánsainak keresése?

3.20. Milyen értékeket célszerű az érvénytelen kombinációkhoz rendelni

a, diszjunktív

b, konjunktív

alakbani egyszerűsítésnél?

3.21. Van-e értelme csupán X-ket tartalmazó tömböt kialakítani? Igen? Nem? Miért?

3.22. Hány változóig használható a **síkbeli KV** tábla?

3.23. Milyen probléma lép fel **4 változó felett** a KV táblán?

3.24. Hogyan készíthető öt-, ill. hatváltozós térbeli KV tábla?

3.25. **Hat logikai változó** fölött milyen módszerrel végezhető el az egyszerűsítés?

3.26. Milyen hálózatokat tekintünk **kétszintű**, ill. **többszintűnek**?

3.27. Milyen kapcsolatban van a kétszintű realizálás a diszjunktív, ill. konjunktív alakbani egyszerűsítéssel?

3.28. Hányféleképpen realizálható egy logikai függvény **kétszintű hálózattal**?

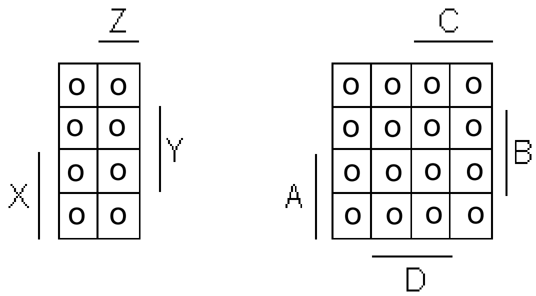
3.29. Miért előnyös a **NAND/NAND**, ill. **NOR/NOR** alakbani realizálás?

3.30. Mit tekintünk **ekvivalens megoldásoknak**?

3.31. Milyen **pótlólagos egyszerűsítési** lehetőségek vannak érintkezős hálózatok esetén?

3.1. Példa

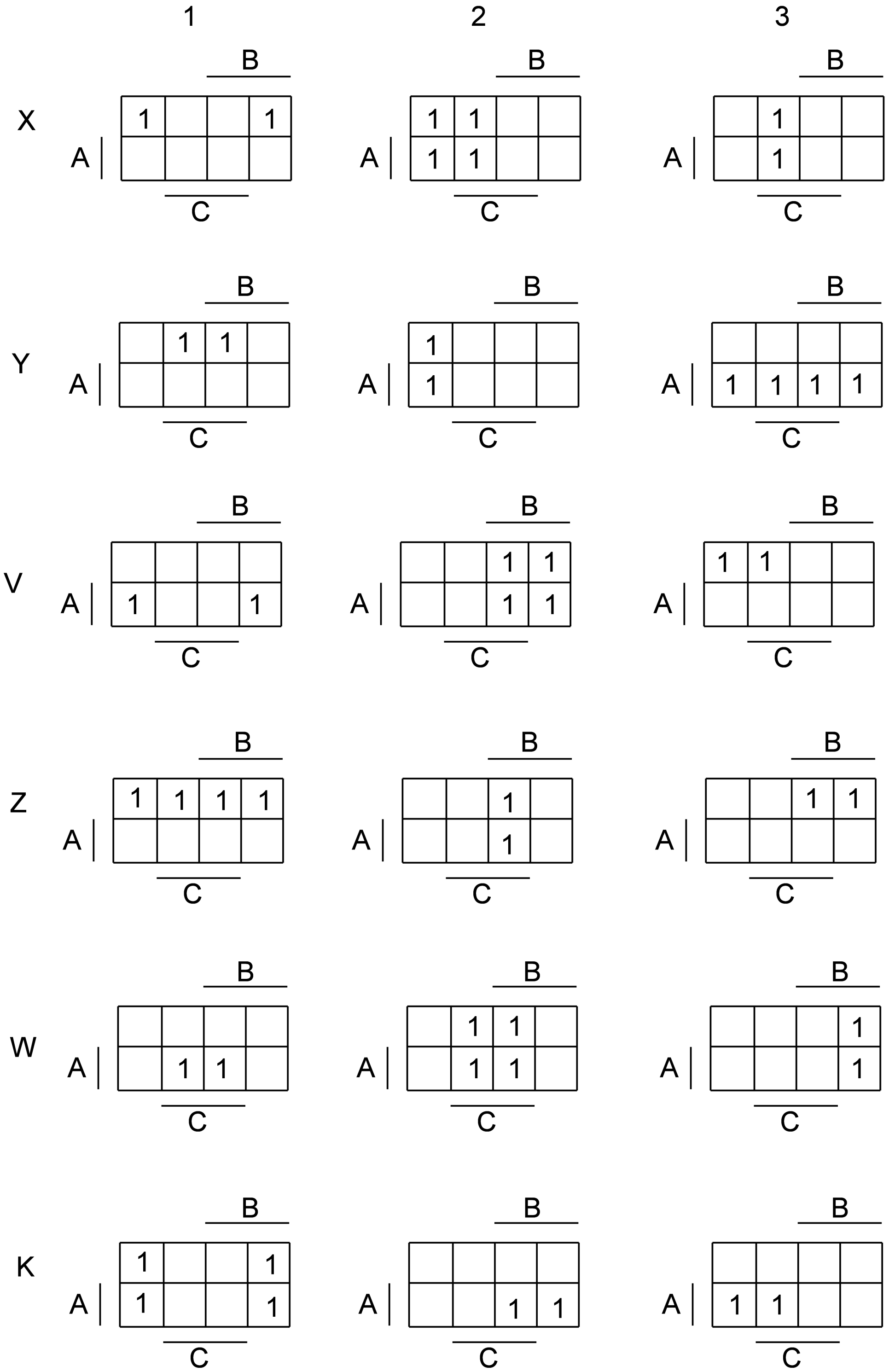
Jelölje be a 3.1. ábrán egy-egy választott minterm **valamennyi szomszédját** és ellenőrizze a megoldást a válaszok megtekintésével.



3.1. ábra

3.2. Példa

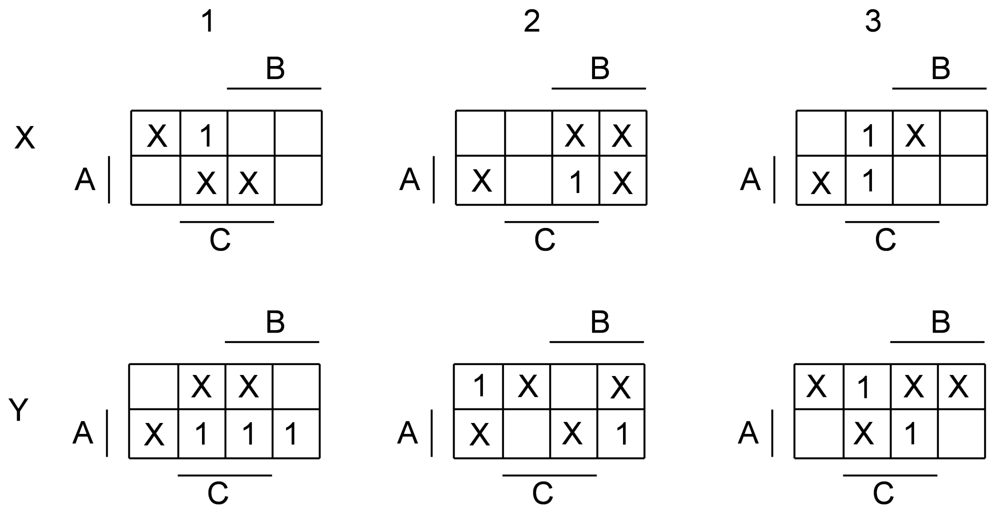
Végezze el a 3.2. ábrán látható valamennyi KV tábla egyeseinek tömbösítését. Írja be a leolvasott eredményeket, majd ellenőrizze a megoldást.



3.2. ábra

3.3. Példa

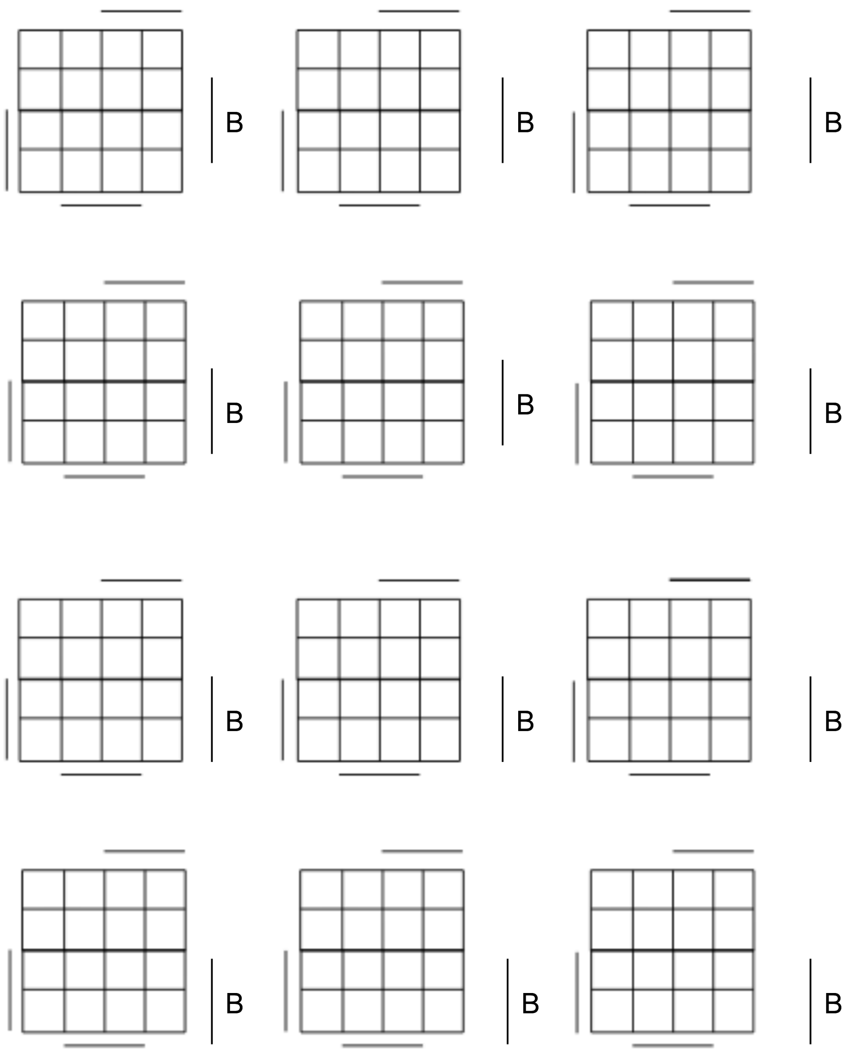
Egyetlen tömbbel fedje le a 3.3. ábra KV tábláinak valamennyi 1-esét, majd a tömbök leolvasása és beírása után ellenőrizze válaszait.



3.3. ábra

3.4. Példa

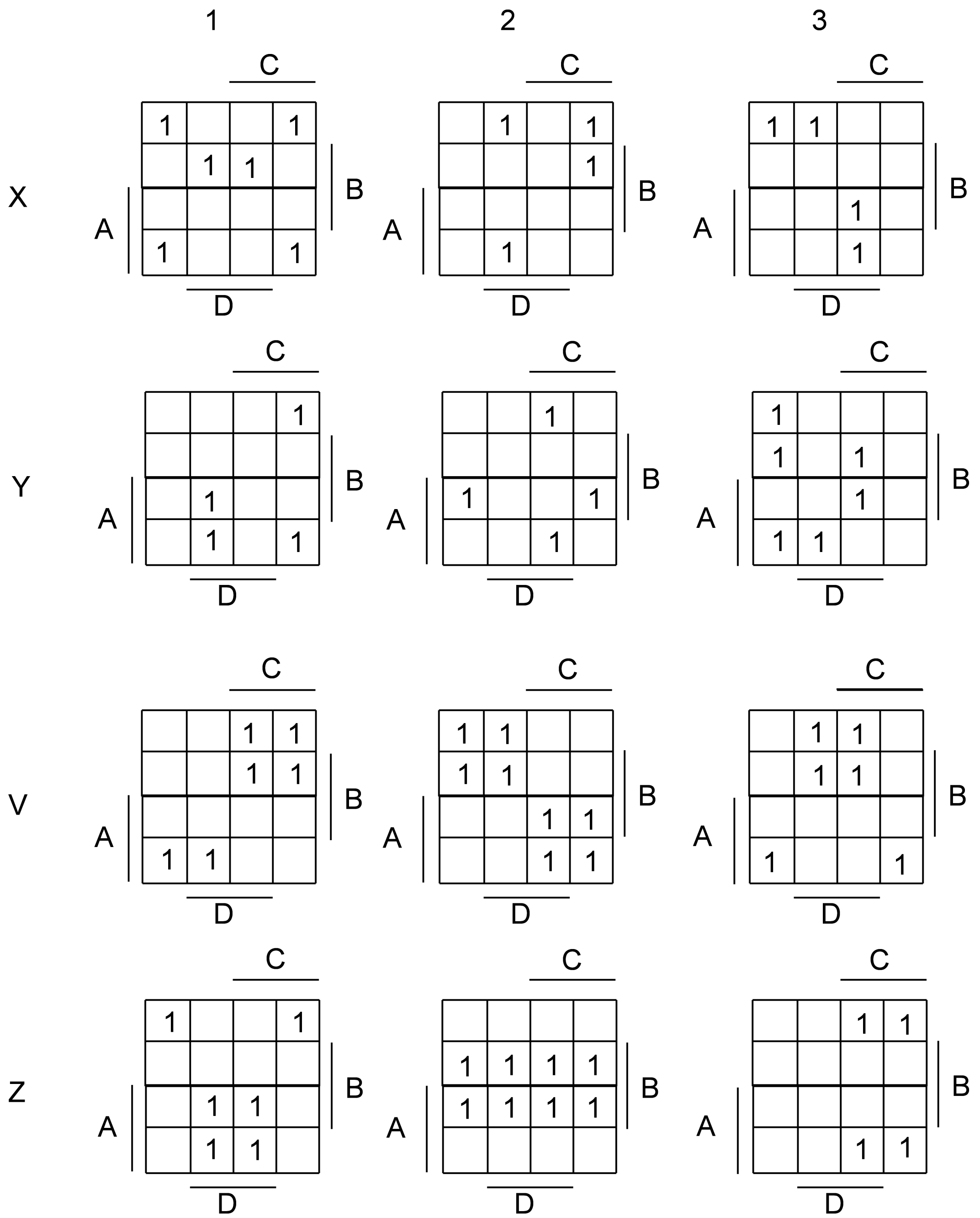
Végezze el a 3.4, 3.5 és 3.6. ábrákon adott függvények tömbösítését és leolvasását. A helyes választ csak valamennyi megoldás után nézze meg.



3.4. ábra

Eredmények:

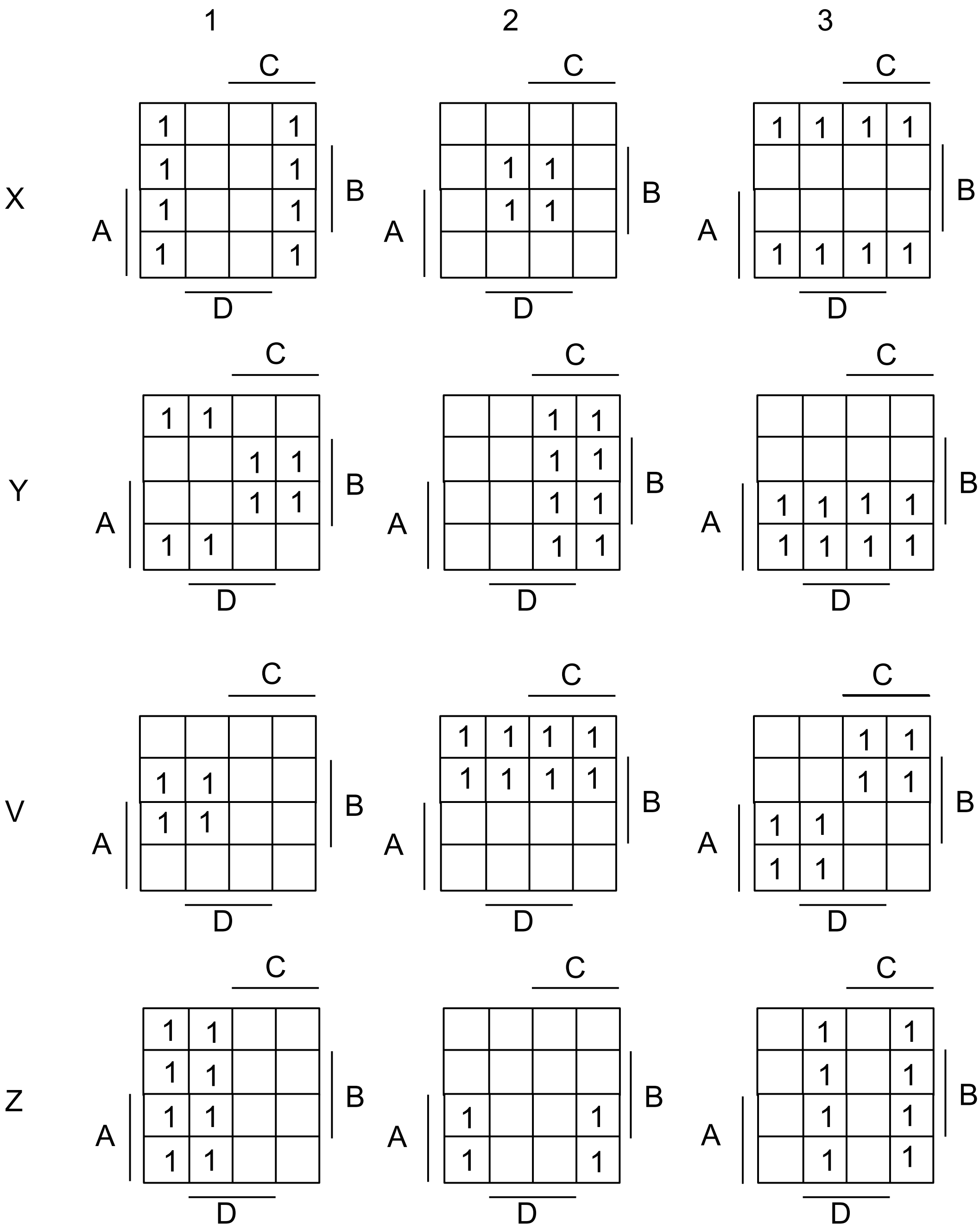
X1:	X2:	X3:
Y1:	Y2:	Y3:
V1:	V2:	V3:
Z1:	Z2:	Z3:



3.5. ábra

Eredmények:

X1:	X2:	X3:
Y1:	Y2:	Y3:
V1:	V2:	V3:
Z1:	Z2:	Z3:



3.6. ábra

Eredmények:

X1:	X2:	X3:
Y1:	Y2:	Y3:
V1:	V2:	V3:
Z1:	Z2:	Z3:

3.5. Példa

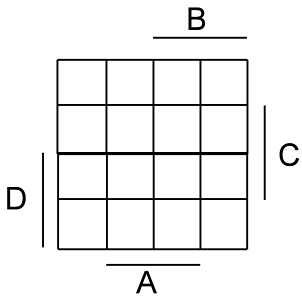
Egyszerűsítse az

$$F(D,C,B,A) = \sum(0,1,3,4,5,6,7,11,14,15)$$

függvényt diszjunktív és konjunktív alakban.

Megoldás

3.5.1. Ábrázolja a függvényt a 3.7. ábrán megadott KV táblán!



3.7. ábra

3.5.2. Végezze el a tömbösítést (öt négyes tömb van)!

3.5.3-v Ponttal jelölje meg azon mintermeket, amelyek csak **egyetlen tömbbel** vannak lefedve!

Ezek: $m_?^4$, $m_?^4$, $m_?^4$.

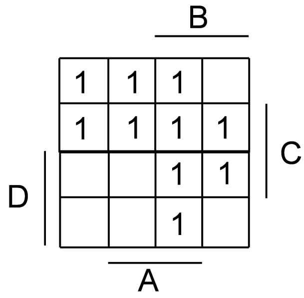
3.5.3. Olvassa le azon tömböket, amelyek a fenti mintermeket lefedik! Tömb (primimplikáns) – Minterm

…………………………… m_0^4

…………………………… m_{11}^4

…………………………… m_{14}^4

3.5.5.v. Vonalkázza be ezen tömböket a 3.8. ábrán!



3.8. ábra

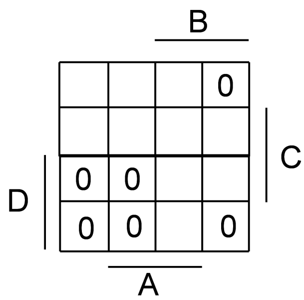
3.5.6.v. Maradt-e olyan minterm, amelyet a lényeges primimplikánsok nem fednek le?

3.5.7.v. Mely tömbök **redundánsak**?

3.5.8.v. Fentiek alapján a függvény **minimalizált diszjunktív** alakja:

F =

3.5.9. A **konjunktív minimál alak** előállításához tömbösítse a függvény „0” helyeit a 3.9. ábrán! (Egy 4-es és két kettes tömb van)!



3.9. ábra

3.5.10.v. Ponttal jelölje meg azon 0 helyeket, melyeken – valamennyi tömb bejelölése után – egyetlen hurok megy keresztül!

Ezek: $m_?^4$, $m_?^4$, $m_?^4$, $m_?^4$.

3.5.11. Írja be a fenti mintermek alá, mely primimplikáns tartalmazza!

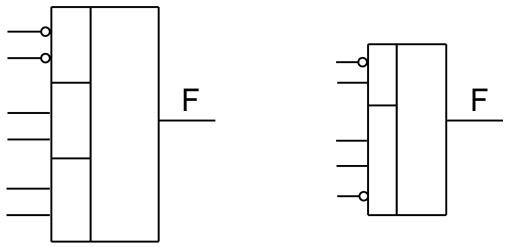
3.5.12. Vonalkázza be ezen nélkülözhetetlen tömbök által lefedett területet! Igen? Nem? Melyik?

3.5.13. Van-e redundáns tömb? Igen? Nem? Melyik?

3.5.14.v. Fentiek alapján a függvény **konjunktív minimál** alakja:

F =

3.5.15.v. Egészítse ki a 3.10. ábrát a függvény **diszjunktív**, ill. **konjunktív minimál** alakjának megfelelő hálózattá.



3.10. ábra

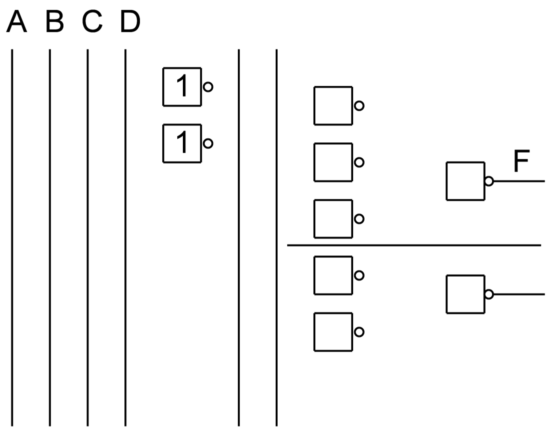
3.5.16. A függvény NAND/NAND alakzatbani megvalósításához induljon ki a **kétszer tagadott diszjunktív minimál** alakból és bontsa fel a belső tagadás jelet a De Morgan szabály felhasználásával!

$$F = \overline{\overline{\overline{D}\,\overline{B} \vee BC \vee AB}}$$
$$F =$$

3.5.17. A NOR/NOR alakzatbani realizációhoz induljon ki a **kétszer tagadott konjunktív** alakból és bontsa fel a belső tagadás jelet a De Morgan szabály ismételt felhasználásával!

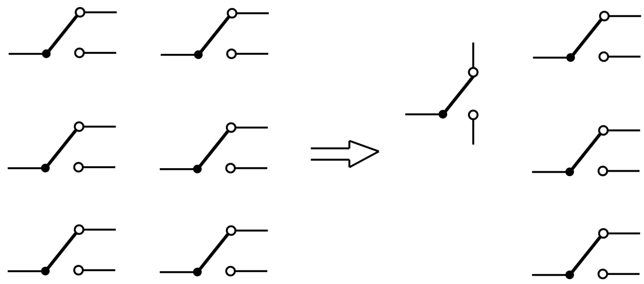
$$F = \left(\overline{D} \vee B\right)\ \left(A \vee C \vee \overline{B}\right)$$

3.5.18.v. Egészítse ki a 3.11. ábrát a függvény NAND/NAND, ill. NOR/NOR alakjának megfelelően!



3.11. ábra

3.5.19.v. Az érintkezős megvalósításhoz induljon ki a függvény **diszjunktív minimál** alakjából. Egészítse ki a 3.12. ábrát ennek megfelelően!

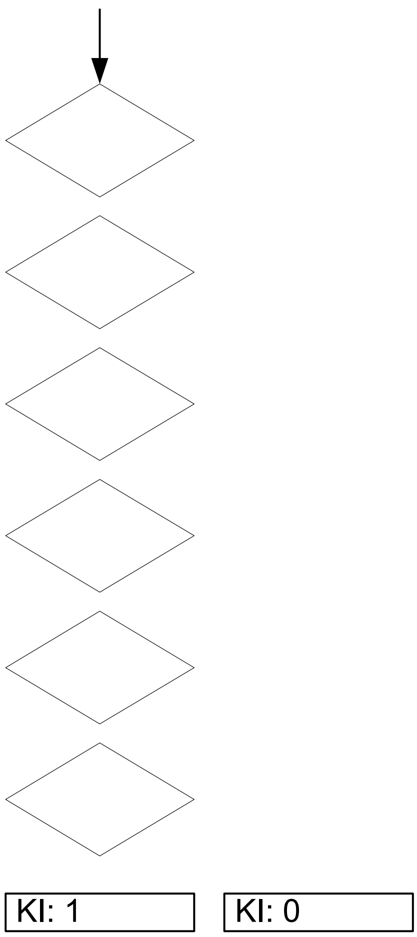


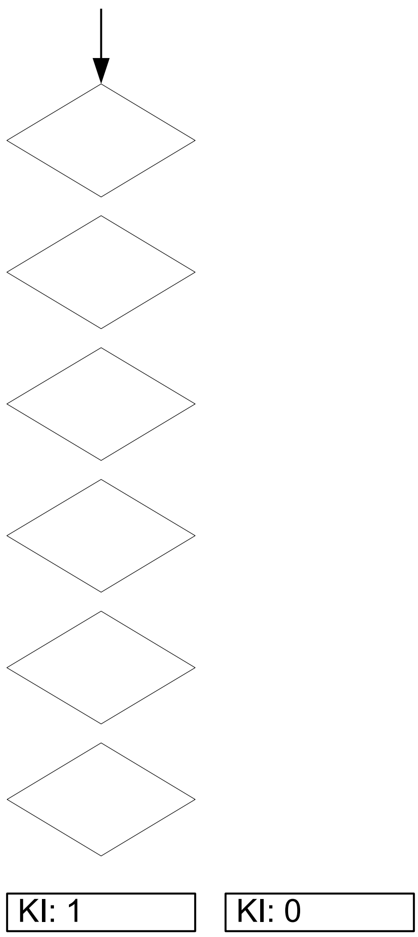
3.12. ábra

3.5.20.v. Milyen további egyszerűsítéseket tud végezni az érintkezős hálózaton?

3.5.21. Állapítsa meg az érintkező megtakarítást az egyszerűsítés nélküli teljes diszjunktív normál alakhoz képest!

3.5.22.v. Készítse el a függvény diszjunktív, ill. konjunktív alakjának folyamatábráját a 3.13. ill. 3.14. ábrák kiegészítése révén!





3.13. ábra 3.14. ábra

3.6. Példa

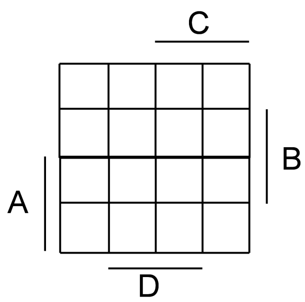
Egyszerűsítse az

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,1,11,12,13,14,15)\vee\sum_{x}(5,6,7,8,9,10)$$

függvényt diszjunktív és konjunktív alakban.

Megoldás

3.6.1. Ábrázolja a függvényt a 3.15. ábrán!



3.15. ábra

3.6.2. Végezze el a tömbösítést!

3.6.3. Hány tömböt képzett?

2-es tömb…………db

4-es tömb…………db

8-as tömb…………db

3.6.4. Ponttal jelölje meg azon mintermeket, amelyeken csak egy hurok meg keresztül! Ezek:
$m_?^4$, $m_?^4$, $m_?^4$.

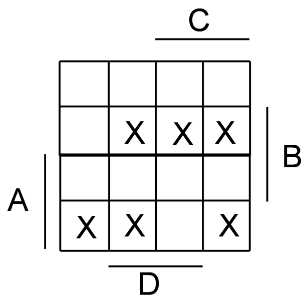
3.6.5. Írja a fenti mintermek alá a hozzátartozó nélkülözhetetlen primimplikánst!

3.6.6.v. Vonalkázza be az ezen tömbök által lefedett területet!

3.6.7.v. A függvény diszjunktív minimál alakja:

F =

3.6.8. A **konjunktív** minimál alak előállításához végezze el a tömbösítést a kiegészített 3.16. ábrán.



3.16. ábra

3.6.9. Hány tömböt képzett?

2-es tömb…………db

4-es tömb…………db

8-as tömb…………db

3.6.10.v. Ponttal jelölje meg azon mintermeket, amelyeken egy hurok megy át:

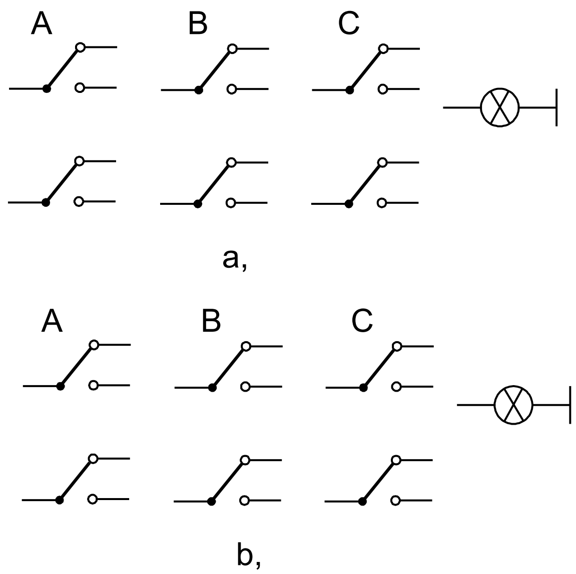
Ezek:

$m_?^4$, $m_?^4$, $m_?^4$.

3.6.11.v. A konjunktív minimál alak:

F =

3.6.12.v. Rajzolja meg az egyszerűsített függvény diszjunktív (a), ill. konjunktív (b) alakjának érintkezős megfelelőjét (ld. 3.17. ábra).



3.17. ábra

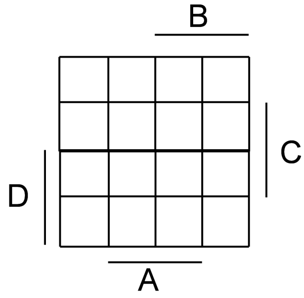
3.7. Példa

Egyszerűsítse az

$$F(D,C,B,A)=\sum(3,4,13,14)\vee\sum_x(2,5,7,9,15)$$

függvényt diszjunktív és konjunktív alakban!

3.7.1.v. Ábrázolja a függvényt és végezze el a tömbösítést a 3.18. ábrán!



3.18. ábra

3.7.2. A nélkülözhetetlen primimplikánsok:

az $m_?^4$ miatt:

az $m_?^4$ miatt:

3.7.3. Lefedik-e a függvény valamennyi 1-essel jelölt mintermjét a nélkülözhetetlen primimplikánsok?

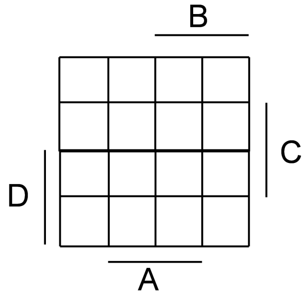
3.7.4. Ábrázolja ismét a függvényt a 3.19. ábrán és vizsgálja meg, hogy a fennmaradt 1-esek lefedésére hány lehetőség van!

Melyik előnyösebb?

m_3^4

Melyik előnyösebb?

m_{13}^4



3.19. ábra

3.7.5.v. Fentiek alapján a függvény minimál diszjunktív alakja az **ekvivalens megoldásokkal:**

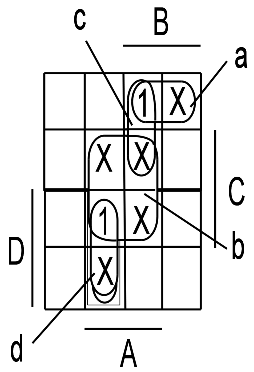
F =

F =

Melyik megoldáshoz kell több inverter?

3.7.6.v. A 3.7.4-ben a szükséges primimplikáns kiválsztása **spekulatív** úton történt. Végezze el a **segédfüggvény** (g) felírásával! E célból foglalja táblázatba a le nem fedett mintermeket és a hozzájuk tartozó primimplikánsokat (3.20. ábra).

$p_i \backslash m_i$	3	13
a		
b		
c		
d		



3.20. ábra

3.7.7.v. Végezze el a kijelölt műveletet!

g =

3.7.8. Figyelje meg, hogy a két szóban forgó minterm (3, 13) lefedése bármelyik, a segédfüggvényben együtt szereplő két primimplikánssal lehetséges.

A választás szempontjai:

a, **legkevesebb betűt** tartalmazó szorzat,

b, **kevesebb változót** tartalmazó primimplikáns.

3.7.9. Alkalmazza a fenti két feltételt a kapott **g** segédfüggvényre!

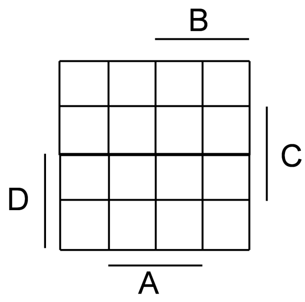
3.7.10.v. A b, szempont szerint választott szorzatok:

F =

F =

Hasonlítsa össze a 3.7.5-ben kapott eredménnyel!

3.7.11.v. Végezze el a konjunktív alak tömbösítését a 3.21. ábrán!



3.21. ábra

3.7.12. Nélkülözhetetlen primimplikáns az $m_?^4$ miatt?

3.7.13. Vonalkázza be a 3.22. ábrán, a nélkülözhetetlen tömbök által lefedett területet! Elemezze végig valamennyi **fennmaradó mintermet**, hogy melyik tömb választása előnyösebb, s ez alapján válassza ki a szükséges primimplikánsokat:

$m_0 =$

m_1 :

m_6 :

m_{10} :

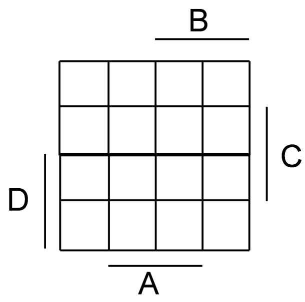
m_{11} :

3.7.14.v. Mely minteremknél dönthető el egyértelműen a választás?

3.7.15. Vonalkázza be a választott primimplikánsok által lefedett területet a 3.22. ábrán. A konjunktív alakban egyszerűsített függvény (ekvivalens megoldások):

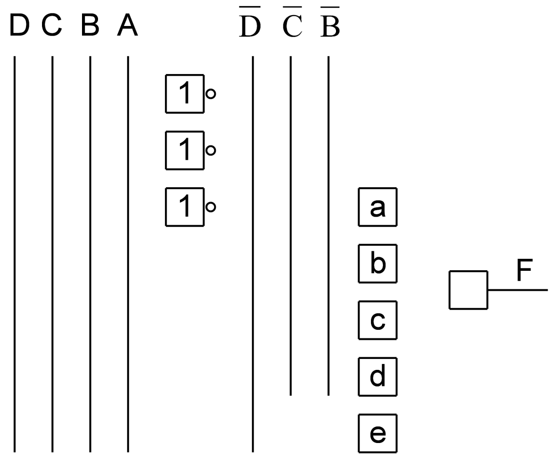
F =

F =



3.22. ábra

3.7.17.v. Egészítse ki a 3.23. ábrát a **diszjunktív** alakú megoldásnak megfelelően.



3.23. ábra

3.8. Példa

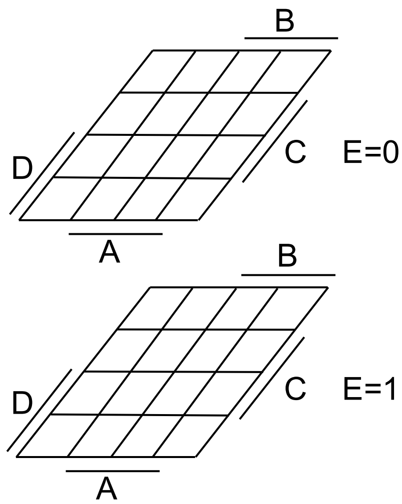
Egyszerűsítse az

$$F(E,D,C,B,A)=\sum(0,1,2,5,7,8,13,18,23,25,29)\vee\sum_t(9,15,21,24,31)$$

függvényt diszjunktív és konjunktív alakban! A megoldást az ismert lépésekben végezze el a 3.24. ábrán!

Eredmény:

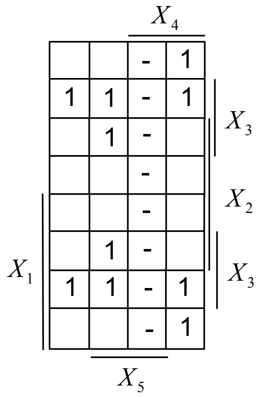
F =



3.24. ábra

3.9. Példa

Egyszerűsítse a 3.25. ábrán grafikusan adott ötváltozós függvényt diszjunktív alakban!



3.25. ábra

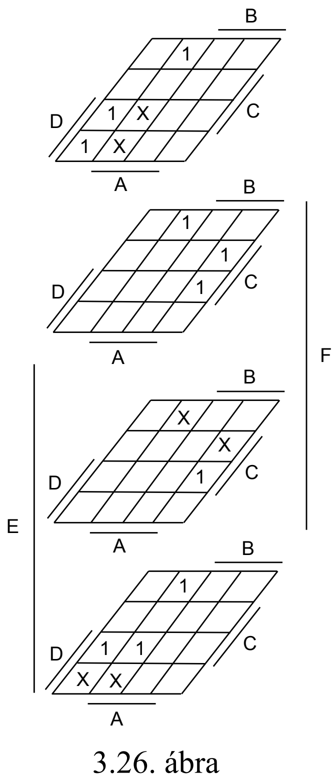
3.10. Példa

Egyszerűsítse a 3.26. ábrán grafikusan adott hatváltozós függvényt diszjunktív alakban!

3.10.1. Végezze el a tömbösítést a 4 változós táblákon, majd a szomszédos táblák között! Jelölje be az összefüggő tömböket!

Eredmény:

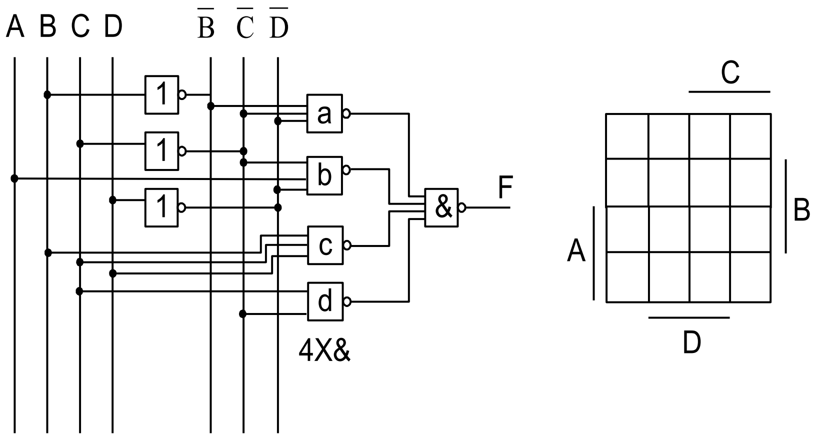
F =



3.26. ábra

3.11. Példa

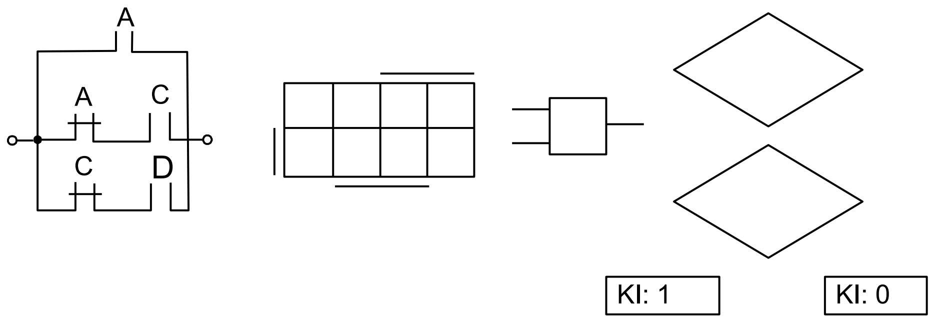
Állapítsa meg, hogy a 3.27. ábrán látható logikai hálózat a legegyszerűbben van-e realizálva! A választól függően korrigálja a kapcsolást és ellenőrizze az eredményt!



3.27. ábra

3.12. Példa

Állapítsa meg, hogy a 3.28. ábrán vázolt érintkezős hálózatról a mellékelt KV tábla felhasználásával, hogy jól van-e egyszerűsítve! Korrigálja a kapcsolást, majd rajzolja meg az MSz jelképet, ill. folyamatábrát!



3.28. ábra

Gyakorló feladatok

Egyszerűsítse az alábbi függvényeket

a, diszjunktív

b, konjunktív alakban

a mellékelt KV táblák felhasználásával (3.29. ábra).

3.1. $F(A,B,C,D)=\sum(2,3,5,7,8,12,14)$

3.2. $F(A,B,C,D)=\sum(,4,6,7,10,12,13,14)\vee\sum_X(3,5,15)$

3.3. $F(D,C,B,A)=\sum(0,1,2,3,4,6,8,9,10,11)$

3.4. $F(X,Y,Z,V)=\sum(1,3,7,9,12,13,14,15)\vee\sum_X(4,11)$

3.5. $F(D,C,B,A)=\sum(2,5,6,9,13,14)\vee\sum_X(0,7,8,10,15)$

3.6. $F(A,B,C,D)=\sum(4,10,11,13)\vee\sum_X(0,2,5,15)$

3.7. $F(P,0,R,S)=\sum(2,6,7,8,10)\vee\sum_X(0,12,13,15)$

3.8. $F(X,Y,V,Z)=\sum(1,4,6,8,11,12)\vee\sum_X(2,5,13,15)$

3.9. $F(A,B,C,D,\acute{E})=\prod(3,10,12,17,22,31)$

3.10. $F(X,Y,Z,V)=\prod(2,3,4,5,6,10,11,12,13,14)$

3.11. $F(X,Y,Z,V)=\prod(2,3,4,5,6,,11,13,)\vee\sum_X(10,12,14)$

3.12. $F(D,C,B,A)=\sum(0,1,2,4,7,9,10,12,15)$

3.13. $F(B,A,C,D)=\sum(1,3,5,7,8,10,11,12,14)$

3.14. $F(A,B,C,D)=\sum(3,6,8,10,11,13,14,15)$

3.15. $F(D,C,B,A)=\sum(0,2,3,4,5,8,10,11,12,13,14,15)$

3.16. $F(E,D,C,B,A)=\sum(2,3,4,5,6,7,13,22,23,30,31)$

3.17. $F(A,B,C,D)=\sum(1,5,6,7,11,12,13,15)$

3.18. $F(W,X,Y,Z)=\sum(4,5,7,12,14,15)\vee\sum_X(3,8,10)$

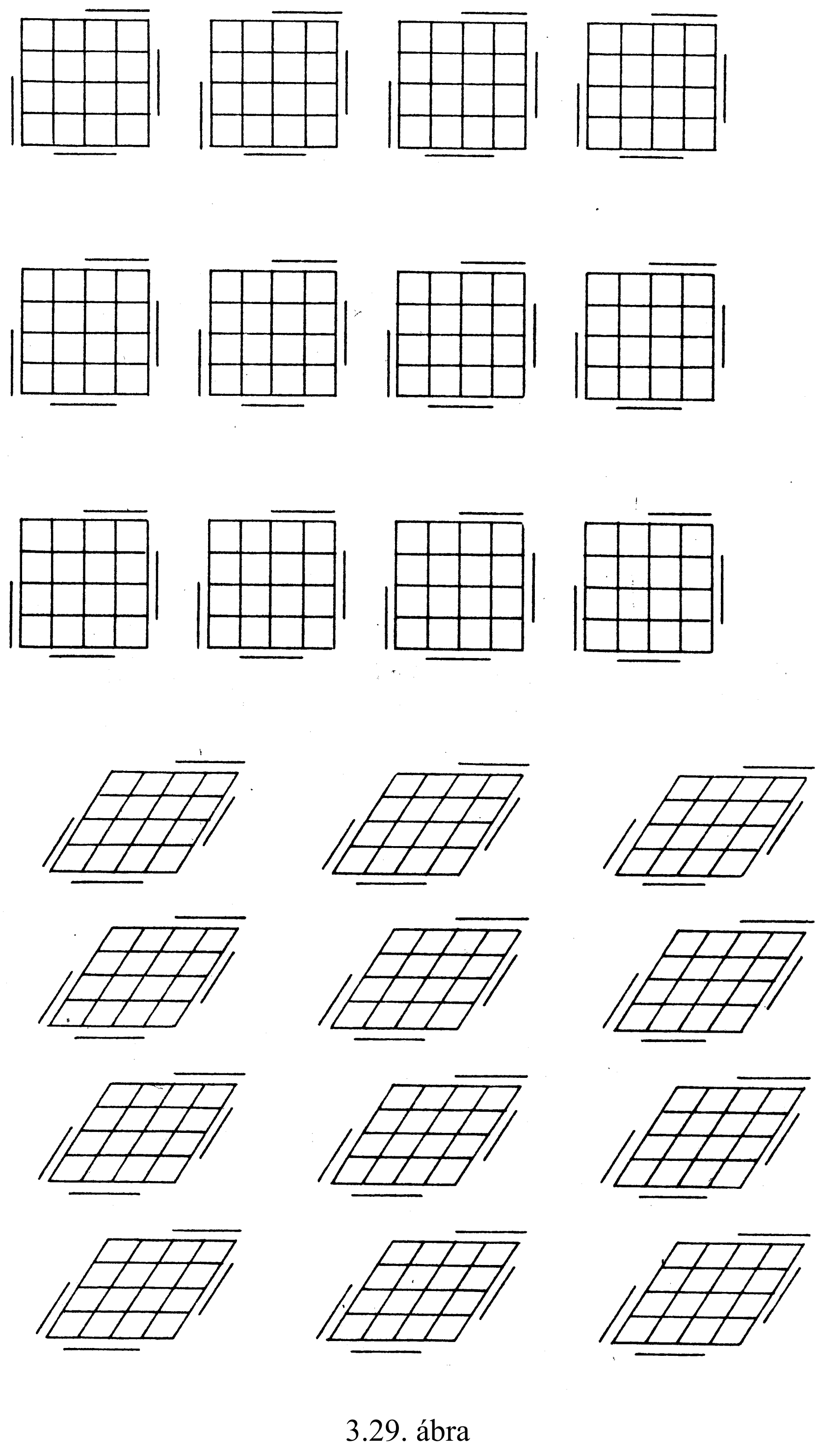
3.19. $Y(A,B,C,D,A)=\sum(0,2,4,7,11,13)\vee\sum_X(1,5,8,10,14)$

3.20. $Y(A,B,C,D,A)=\sum(0,2,4,7,11,13)\vee\sum_X(1,5,8,10,14)$

3.21. $Y(A,B,C,D,A)=\sum(0,1,4,7,11,13)\vee\sum_X(2,5,8,10,14)$

3.22. $Y(A,B,C,D,A)=\sum(0,2,4,7,11,14)\vee\sum_X(1,5,8,10,13)$

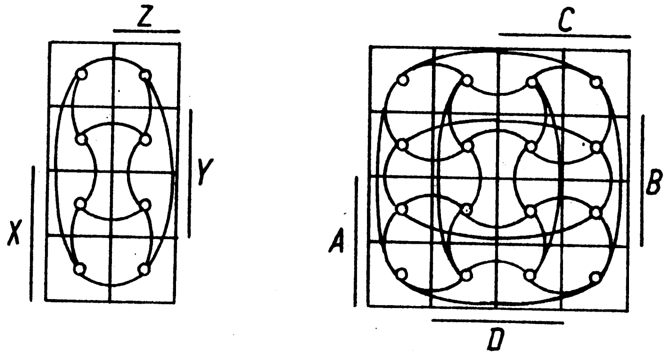
3.23. $Y(A,B,C,D,A)=\sum(0,2,4,8,11,13)\vee\sum_X(1,5,7,10,14)$



3.29. ábra

Válaszok, megoldások

3.1. Példa: lásd a 3.1.v. ábrát!



3.1.v. ábra

3.2. Példa: a megoldásokat a 3.2. ábra szerinti elrendezésben adjuk meg.

$X1: F = \overline{A}\,\overline{C}$	$X2: F = \overline{B}$	$X3: F = \overline{B}C$
$Y1: F = \overline{A}C$	$Y2: F = \overline{B}\,\overline{C}$	$Y3: F = A$
$V1: F = A\overline{C}$	$V2: F = B$	$V3: F = \overline{A}\,\overline{B}$
$Z1: F = A$	$Z2: F = BC$	$Z3: F = \overline{A}B$
$W1: F = AC$	$W2: F = B$	$W3: F = B\overline{C}$
$K1: F = \overline{C}$	$K2: F = AB$	$K3: F = A\overline{B}$

3.3. Példa:

$X1: F = B\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}$	$X2: F = B$	$X3: F = \overline{B}C$
$Y1: F = A$	$Y2: F = \overline{C}$	$Y3: F = C$

3.4. Példa a 3.4. ábra jelölésével:

$X1: F = \overline{A}\,\overline{D} \vee AD = A \odot D$	$X2: F = \overline{A}BC \vee \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$X3: F = A\,\overline{C}\,\overline{D} \vee \overline{A}CD$
$Y1: F = B\overline{D} \vee A\overline{B}D$	$Y2: F = \overline{A}\,\overline{B}D \vee B\,\overline{C}\,\overline{D}$	$Y3: F = ABD \vee \overline{A}\,B\,\overline{D} = B(A \odot D)$
$V1: F = AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}C$	$V2: F = A \odot B$	$V3: F = B\overline{C}D \vee A\overline{B}C$
$Z1: F = \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D} \vee ABC$	$Z2: F = \overline{A}\,B\,\overline{C} \vee AC\overline{D}$	$Z3: F = \overline{A}\,\overline{C}\,D \vee BC\overline{D}$

A 3.5. ábra jelölésével:

$X1: F = \overline{A}BD \vee \overline{B}\,\overline{D}$

$Y1: F = A\overline{C}D \vee \overline{B}C\overline{D}$

$V1: F = \overline{A}C \vee A\overline{B}\,\overline{C}$

$Z1: F = AD \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$

$X2: F = \overline{A}C\overline{D} \vee \overline{B}\,\overline{C}D$

$Y2: F = \overline{B}CD \vee AB\overline{D}$

$V2: F = A \odot C$

$Z2: F = B$

$X3: F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee ACD$

$Y3: F = \overline{B}\,\overline{C} \vee BCD$

$V3: F = \overline{A}D \vee A\overline{B}\,\overline{D}$

$Z3: F = \overline{B}C$

A 3.6. ábra jelölésével:

$X1: F = \overline{D}$

$Y1: F = B \odot C$

$V1: F = B\overline{C}$

$Z1: F = \overline{C}$

$X2: F = BD$

$Y2: F = C$

$V2: F = \overline{A}$

$Z2: F = A\overline{D}$

$X3: F = \overline{B}$

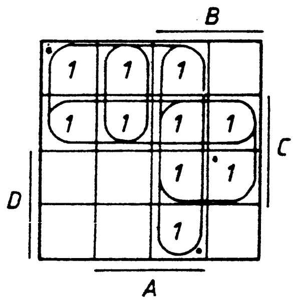
$Y3: F = A$

$V3: F = A \oplus C$

$Z3: F = D$

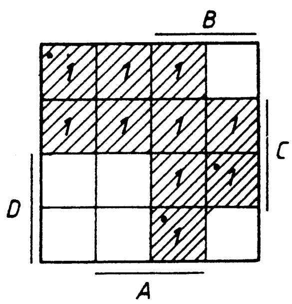
3.5. Példa

3.5.3. Lásd a 3.7.v. ábrát!



3.7.v. ábra

3.5.5. Lásd a 3.8.v. ábrát.

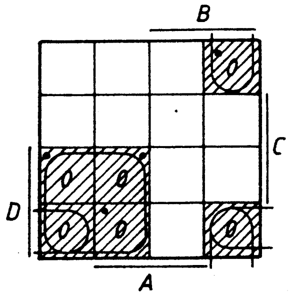


3.8.v. ábra

3.5.7. Redundáns tömbök: $A\overline{B}$, $C\overline{D}$

3.5.8. $F = BD \vee AB \vee \overline{B}\,\overline{C}$

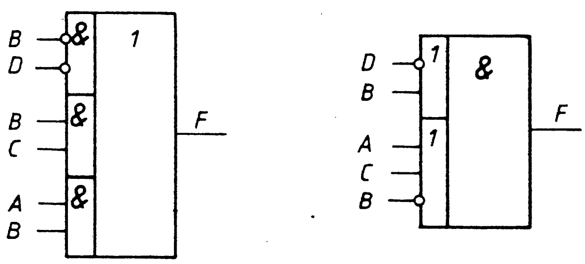
3.5.10. Lásd a 3.9.v. ábrát!



3.9.v. ábra

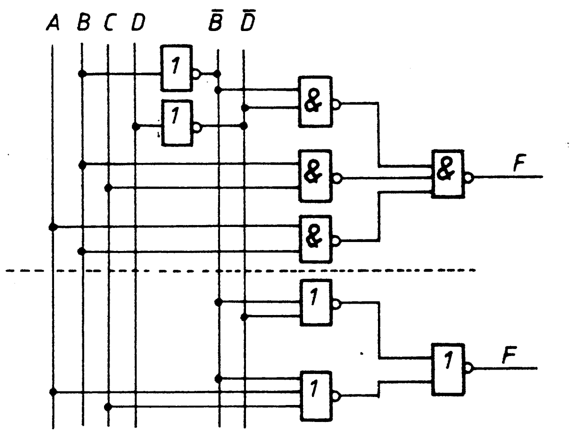
3.5.14. $F = \left(\overline{D} \vee B\right)\ \left(A \vee C \vee \overline{B}\right)$

3.5.14. Lásd a 3.10.v. ábrát!



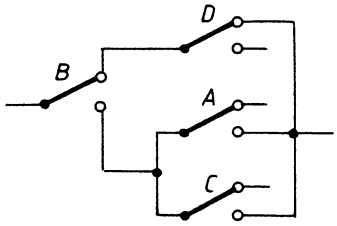
3.10.v. ábra

3.5.18. Lásd a 3.11.v. ábrát!



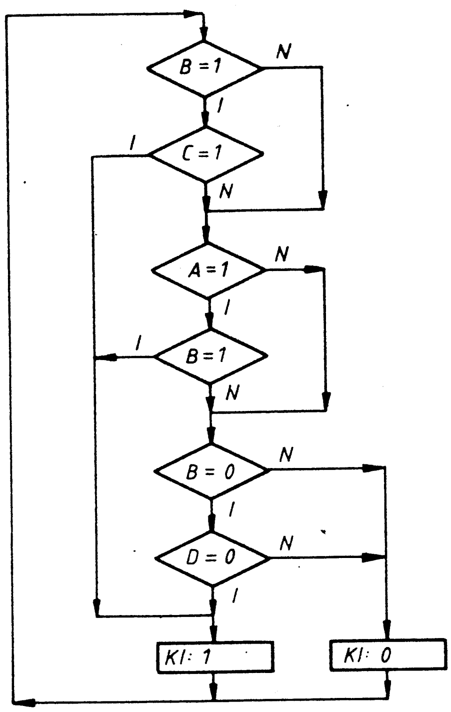
3.11.v. ábra

3.5.20. Lásd a 3.12.v. ábrát!

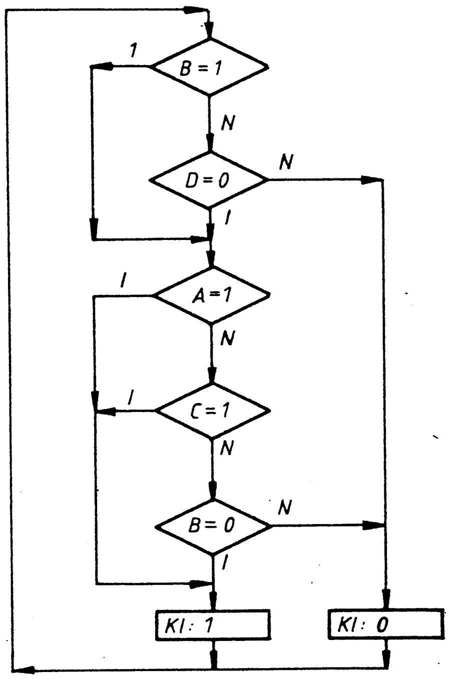


3.12.v. ábra

3.5.22. Lásd a 3.13.v. ill. 3.14.v. ábrát!



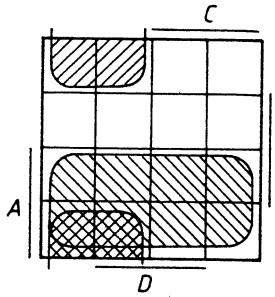
3.13.v. ábra



3.14.v. ábra

3.6. Példa

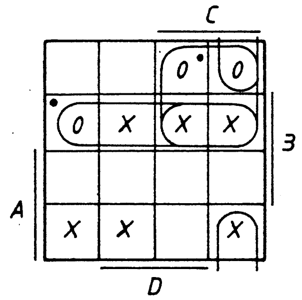
3.6.6. Lásd a 3.15.v. ábrát!



3.15.v. ábra

3.6.7. $F = A \vee \overline{B}\,\overline{C}$

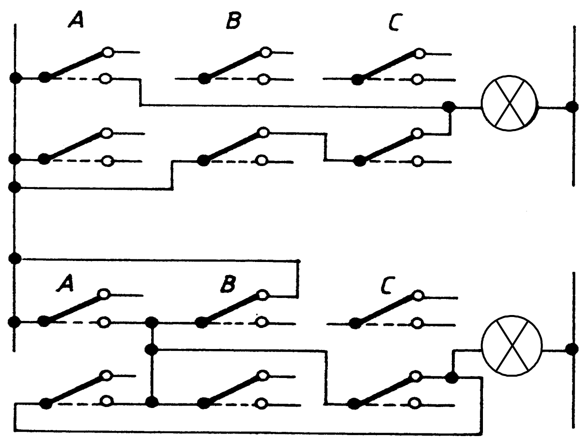
3.6.10. Lásd a 3.16.v. ábrát!



3.16.v. ábra

3.6.11. $F = \left(A \vee \overline{B}\right)\ \left(A \vee \overline{C}\right)$

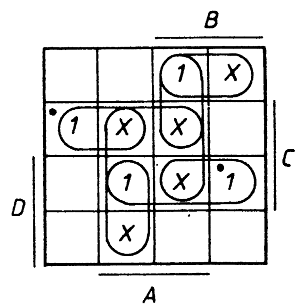
3.6.12. Lásd a 3.17.v. ábrát.



3.17.v. ábra

3.7. Példa

3.7.1. Lásd a 3.18.v. ábrát.



3.18.v. ábra

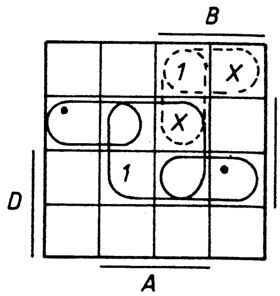
3.7.5. $$F = AC \vee BCD \vee \overline{B}C\overline{D} \vee AB\overline{D}$$
$$F = AC \vee BCD \vee \overline{B}C\overline{D} \vee B\overline{C}\overline{D}$$

3.7.6. $g=(a\vee c)\quad(b\vee d)$

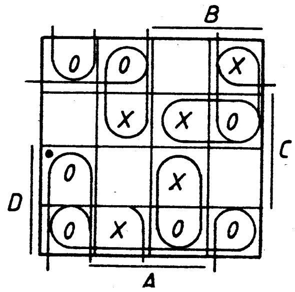
3.7.7. $g=ab\vee bc\vee ad\vee cd$

3.7.9. $ab,\quad bc$

3.7.11. Lásd a 3.22.v. ábrát!



3.20.v. ábra

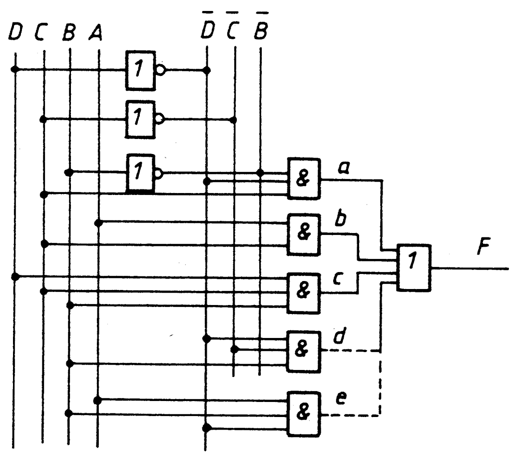


3.22.v. ábra

3.7.14. $m_1^4,\ m_{11}^4$

3.7.16. $$\begin{aligned}F_1&=(D\vee B\vee A)(C\vee D)(D\vee\overline{B}\vee A)(\overline{D}\vee\overline{A}\vee\overline{B})\\F_2&=(\overline{D}\vee B\vee A)(C\vee D)(D\vee\overline{C}\vee\overline{B})(\overline{D}\vee\overline{A}\vee\overline{B})\end{aligned}$$

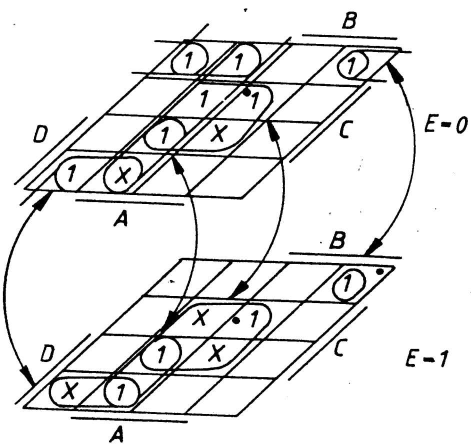
3.7.17. Lásd a 3.23.v. ábrát!



3.23.v. ábra

3.8. Példa

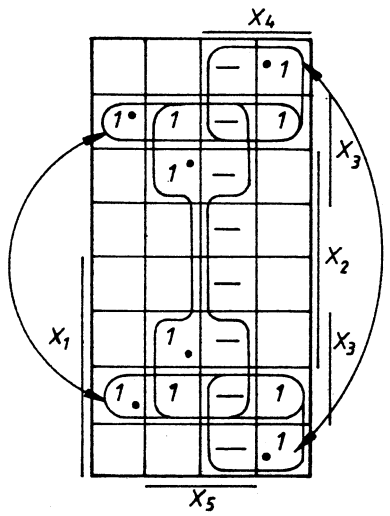
A 3.24.v. ábra alapján: $F=AC\vee\overline{B}\,\overline{C}D\vee\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{E}\vee\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$



3.24.v. ábra

3.9. Példa

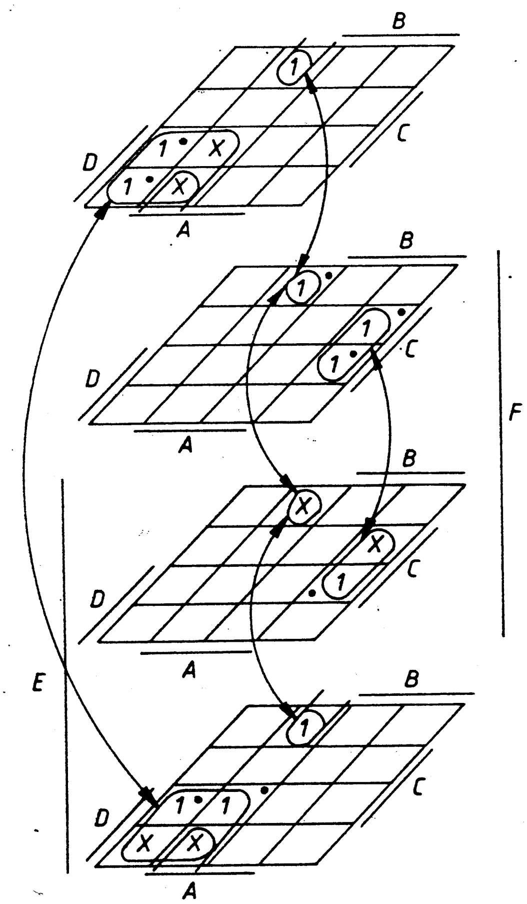
A 3.25.v. ábra alapján: $F = X_2 \;\&\; X_4 \vee X_3 \;\&\; X_5 \vee X_2 \;\&\; X_3$



3.25.v. ábra

3.10. Példa

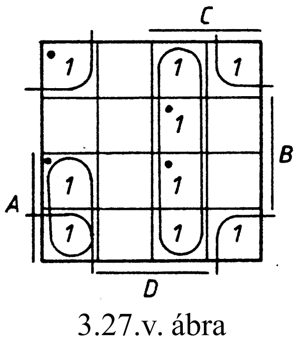
A 3.26.v. ábra alapján: $Y = \overline{B}D\overline{F} \vee F\overline{A}BC \vee A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$



3.26.v. ábra

3.11. Példa

A 3.27.v. ábra szerinti tömbösítéssel: $F = CD \vee \overline{B}\,\overline{D} \vee \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$



3.27.v. ábra