Segédlet a gyakorlati tananyaghoz

GEVAU141B, GEVAU188B c.

tantárgyakból

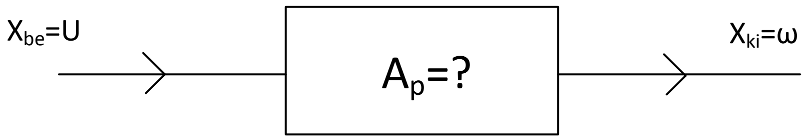
Átviteli tényező számítása:

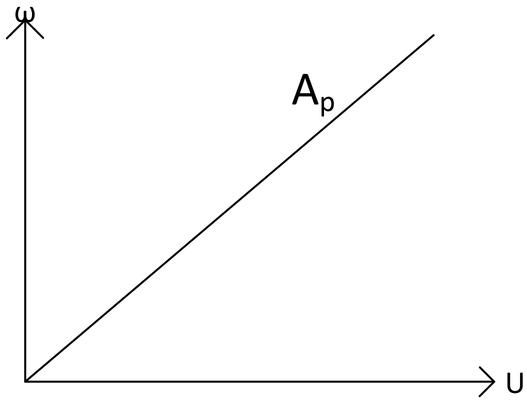
Lineáris rendszer:

Pl1.:

Egy villanymotor 100V-os bemenő jelre 1000 fordulat/perc kimenő jelet ad. Határozza meg az átviteli tényezőt, ha a bemenő jel a motor kapocsfeszültsége, a kimenő jel a motor tengelyének szögsebessége.

$x_{be} = 100V \qquad x_{ki} = \omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1000}{60} = 102\ {}^{1}/_{s}$





A lineáris átviteli tényező, a kimenő jel és a bemenő jel hányadosa:

$$\boldsymbol{A_p} = \frac{x_{ki}}{x_{be}} = \frac{102\ {}^{1}/_{s}}{100V} = 1{,}02\ {}^{1}/_{Vs}$$

Integráló típusú átviteli tényező:

Pl2.:

Egy négyzetes tartály alapterülete 50dm². A tartályba 100dm³/perc-el vizet engedünk. Határozza meg az átviteli tényezőt, ha a bemenő jel a befolyó víz térfogatárama, a kimenő jel pedig a vízoszlop magassága.

$x_{be} = 100\ {}^{dm^3}/_{perc} \quad x_{ki} = h$

$Ha\ \ \Delta t = 1\ perc; akkor\ \Delta h = 2dm$

Az átviteli tényező a kimeneti jel idő szerinti változásának és a bemenő jelnek a hányadosa.

$$A_I = \frac{\dot{x_{ki}}}{x_{be}} = \frac{\frac{\Delta h}{\Delta t}}{x_{be}} = \frac{2\frac{dm}{perc}}{100\frac{dm^3}{perc}} = \frac{1}{50}\frac{1}{dm^2}$$

<u>Nemlineáris tag munkaponti átviteli tényezőjének számítása:</u>

$$A_m = \frac{\partial x_{ki}}{\partial x_{be}} \ ahol \ x_{be} = x_{beM}$$

Pl1.:

Adott az alábbi nemlineáris rendszer:

$$x_{ki} = {x_{be}}^2 + 3 \qquad x_{beM} = 0{,}5$$

Határozza meg az átviteli tényezőt a munkapontban!

Deriváljuk le a függvényt az „X_{be}” változó szerint, majd helyettesítsük be a munkaponti értéket (X_{beM}) a derivált függvénybe.

$$A_M = ({x_{be}}^2 + 3)' = 2 \cdot X_{be}$$

$$A_M(x_{beM}) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$$

Pl2.:

Adott az alábbi nem lineáris rendszer:

$$X_{ki} = \sqrt{2 \cdot X_{be} - 3} \quad valamint \quad X_{kiM} = 1$$

Határozzuk meg a munkaponti átviteli tényezőt!

Mivel a kimeneti munkapont érték van megadva, meg kell határoznunk a bemeneti munkapont értékét.

$$x_{kiM} = \sqrt{2 \cdot x_{beM} - 3}$$

Behelyettesítem az egyenletbe a kimeneti munkapont értéket:

$$1 = \sqrt{2 \cdot x_{beM} - 3} \qquad /(\,)^2$$

$$1 = 2 \cdot x_{beM} - 3 \qquad /+3$$

$$4 = 2 \cdot x_{beM} \qquad /:2$$

$$x_{beM} = 2$$

$$A_m = \left(\sqrt{2 \cdot x_{be} - 3}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x_{be} - 3)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot x_{be} - 3}}$$

Behelyettesítem a bemeneti munkapont értékét:

$$A_M(x_{be}) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 - 3}} = 1$$

Pl3.:

$$x_{ki} = 2 \cdot {x_{be}}^2 + 7 \qquad x_{kiM} = 15$$

$$A_m = ?$$

Pl4.:

$${x_{ki}}^2 = 3 \cdot x_{be} - 1 \qquad x_{kiM} = 2$$

$$A_m = ?$$

Pl5.:

$$x_{ki} = \left(\frac{u}{220}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 \qquad u_m = 55$$

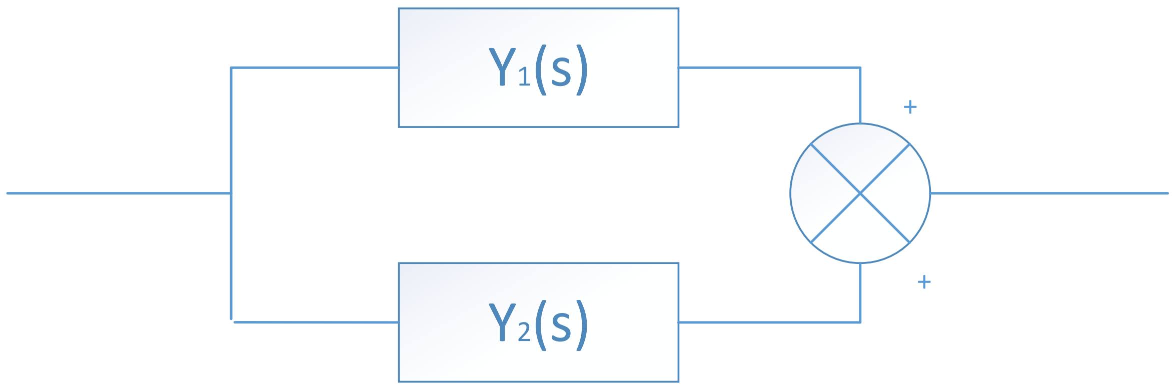
$$A_m = ?$$

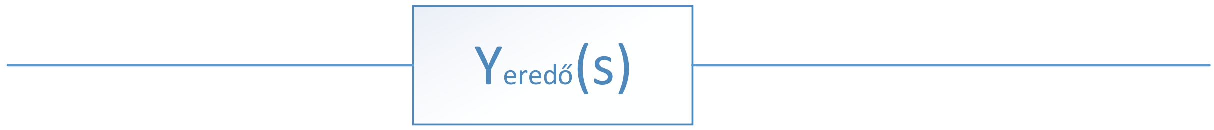
<u>Tagcsoportok eredője:</u>

Soros tagok eredője:

$$Y_{eredő}(s) = Y_1(s) \cdot Y_2(s)$$

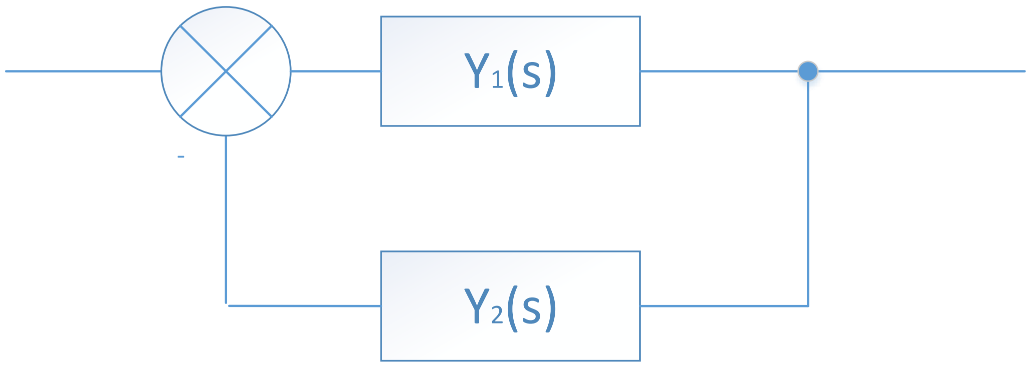
Párhuzamos tagok eredője:





$Y_{eredő}(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$

Visszacsatolt tag eredője:



Negatív visszacsatolás esetén:

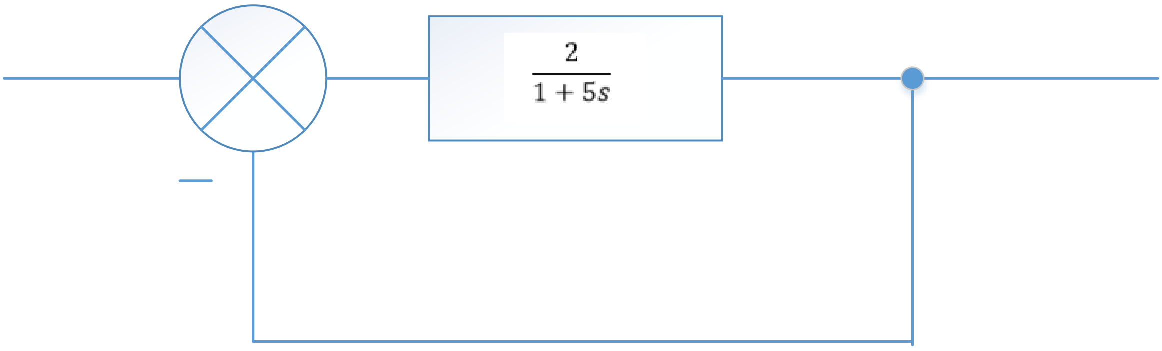
$$Y_{eredő}(s) = \frac{Y_{előrecsatolt}(s)}{1 + Y_{előrecsatolt}(s) \cdot Y_{visszacsatolt}(s)} = \frac{Y_1(s)}{1 + Y_1(s) \cdot Y_2(s)}$$

Pozitív visszacsatolás esetén:

$$Y_{eredő}(s) = \frac{Y_{előrecsatolt}(s)}{1 - Y_{előrecsatolt}(s) \cdot Y_{visszacsatolt}(s)} = \frac{Y_1(s)}{1 - Y_1(s) \cdot Y_2(s)}$$

Pl1.:

Határozza meg az eredő tagot!



Amikor a visszacsatolásban nem szerepel tag, azaz önmagát csatoljuk vissza a rendszerbe, akkor azt úgy tekinthetjük, hogy egy „1”es szorzóval ellátott dobozt csatolunk vissza.

$$Y_{eredő}(s) = \frac{\frac{2}{1+5s}}{1+1\cdot\frac{2}{1+5s}}$$

A nevezőben lévő +1-es tagot közös nevezőre hozzuk a $\frac{2}{1+5s}$es taggal:

$$Y_{eredő}(s) = \frac{\frac{2}{1+5s}}{\frac{2+1+5s}{1+5s}} = \frac{\frac{2}{1+5s}}{\frac{3+5s}{1+5s}}$$

Tört törttel való osztása a reciprokkal való szorzással történik:

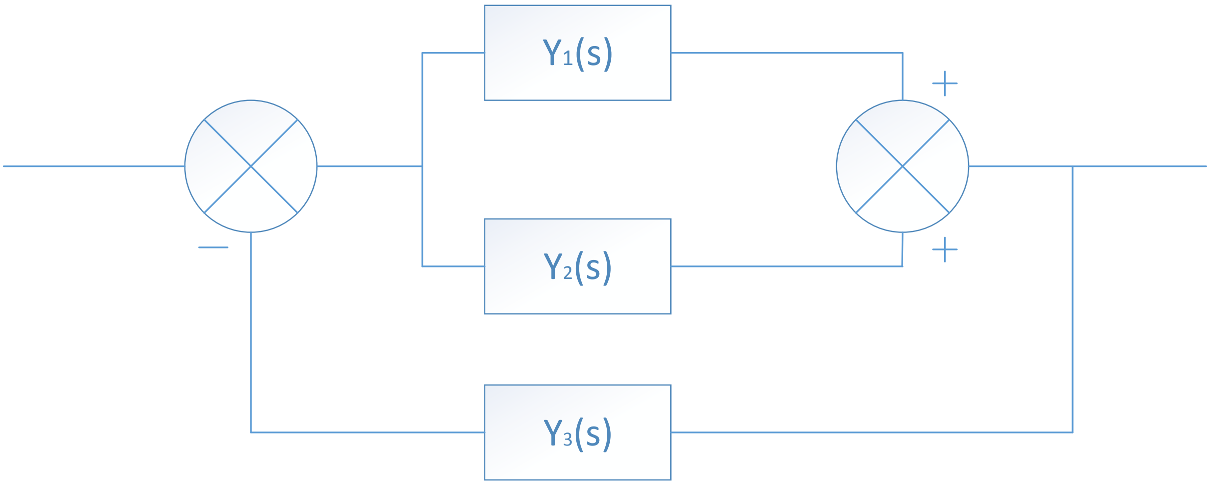
$$Y_{eredő}(s) = \frac{2}{1+5s}\cdot\frac{1+5s}{3+5s} = \frac{2}{3+5s}$$

$$Y_{eredő}(s) = \frac{2/3}{1+5/3\,s}$$

A kapott eredő egy 1Tárolos tag, aminek az erősítési tényezője: Ap=2/3 és az időállandója T=5/3!7

Pl2.:

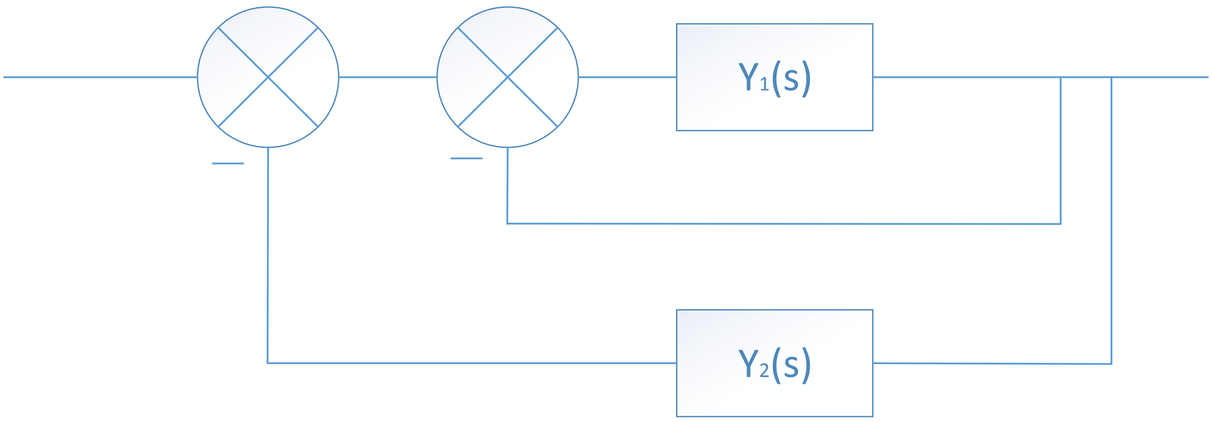
Határozza meg az alábbi rendszer eredőjét!



$$Y_1(s) = \frac{1}{1+2\cdot s} \qquad Y_2(s) = \frac{3}{4+8\cdot s} \qquad Y_3(s) = 5$$

Pl3.:

Határozza meg az alábbi rendszer eredőjét!



$$Y_1(s) = \frac{3}{s} \qquad Y_2(s) = 4$$

<u>Átviteli tagok sülyfüggvényének és átmeneti függvényének meghatározása:</u>

$$y(t) = \alpha^{-1}\{Y(s)\} \qquad h(t) = \alpha^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{s}\right\}$$

Eddigi tanulmányaink alapján ismertek az alábbi összefüggések:

$$\alpha\{1(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \alpha\{e^{-\alpha\cdot t}\} = \frac{1}{s+\alpha} \qquad \alpha\{t\cdot 1(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

Pl1.:

Határozza meg az átviteli függvényt és a súlyfüggvényt!

$$Y(s) = \frac{5}{s \cdot (1+4s)}$$

Az súlyfüggvényt az átviteli függvény inverz Laplace transzformálásával határozzuk meg.

A törtet szétbontjuk a parciális törtekre bontás szabálya alapján, hogy a visszatranszformálás egyszerűen elvégezhető legyen.

$$\frac{5}{s \cdot (1+4s)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{1+4s}$$

Közös nevezőre hozzuk a fenti kifejezést, majd megkeressük az együtthatók értékeit.

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{1+4s} = \frac{A \cdot (1+4s) + B \cdot s}{s \cdot (1+4s)} = \frac{A + 4 \cdot A \cdot s + B \cdot s}{s \cdot (1+4s)}$$

Összehasonlítjuk az eredeti függvény számlálójában lévő kifejezéseket a kapott kifejezéssel:

Konstans tagok vizsgálata:

Az eredeti függvényben egy 5-s konstans szerepel, amíg a kapottban az „A" konstans így:

$$A = 5$$

„s"es tagok vizsgálata:

Az eredetiben az „s"es tagok szorzója „0".

A kapott kifejezésben az „s"es tagok szorzója:

$$4 \cdot A + B = 0$$

Mivel tudjuk, hogy az A=5:

$$20 + B = 0$$

$$B = -20$$

Behelyettesítjük a kapott szorzókat:

$$Y(s) = \frac{5}{s} + \frac{-20}{1+4s} = 5 \cdot \frac{1}{s} - 5 \cdot \frac{4}{{}^{1}\!/_{4} + s}$$

$$y(t) = \alpha^{-1}\left\{5 \cdot \frac{1}{s} - 5 \cdot \frac{4}{{}^{1}\!/_{4} + s}\right\} = 5 \cdot 1(t) + 20 \cdot e^{-\frac{1}{4}t}$$

Átmeneti függvény meghatározása:

$$h(t) = \alpha^{-1}\left\{\frac{5}{s \cdot (1 + 4s)} \cdot \frac{1}{s}\right\} = \frac{5}{s^2 \cdot (1 + 4s)}$$

Mivel „s" a négyzeten van, ezért kell még egy tag a résztörtekre bontásnál.

$$\alpha^{-1}\left\{\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{1 + 4s}\right\}$$

$$\frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{1 + 4s} = \frac{A + 4 \cdot A \cdot s + B \cdot s + 4 \cdot B \cdot s^2 + C \cdot s^2}{s^2 \cdot (1 + 4s)}$$

$A = 5$

$B = -20$

$C = 80$

$$\alpha^{-1}\left\{\frac{5}{s^2} - \frac{20}{s} + \frac{80}{1 + 4s}\right\} = \alpha^{-1}\left\{\frac{5}{s^2} - \frac{20}{s} + 20 \cdot \frac{1}{{}^{1}\!/_{4} + s}\right\} = 5 \cdot t \cdot 1(t) - 20 \cdot 1(t) + 20 \cdot e^{{}^{1}\!/_{4}t}$$

$$h(t) = 5 \cdot t \cdot 1(t) - 20 \cdot \left(1(t) - e^{{}^{1}\!/_{4}t}\right)$$

Pl2.:

$$Y(s) = \frac{2}{3 + 5 \cdot s}$$

$y(t) =?\quad h(t) =?$

Pl3.:

$$Y(s) = \frac{2}{4 + 4 \cdot s + s^2}$$

$y(t) =?\quad h(t) =?$

Állapottér leírásmód:

x’=**A**x+**B**u

v=**C**x+**B**u

pl1.:

Írja fel az alábbi rendszer állapot egyenleteit, ha a vizsgált jel az „y”!

$$4 \cdot \dddot{y} + 3 \cdot \ddot{y} + 7 \cdot y = 4 \cdot u$$

Első lépésként a legmagasabb rendű deriváltat kell kifejezni, valamint célszerű feltüntetni nullás szorzóval azokat a deriváltakat, amik nem szerepelnek a kifejezésben.

$$\dddot{y} = \frac{-3}{4} \cdot \ddot{y} + \frac{-7}{3} \cdot y + \frac{4}{7} \cdot u + 0 \cdot \dot{y}$$

Következő lépésben új változókkal -állapotváltozókkal- nevezzük el a jelenlegi változókat, a legalacsonyabb rendű deriválttól felfelé haladva.

$$x_1 = y;\ x_2 = \dot{y};\ x_3 = \ddot{y};$$

Következő lépésben előállítjuk az új változók elsőrendű deriváltjait:

Mivel az „y”-t $x_1$el neveztük el, így annak deriváltja $\dot{y}$ ami nem más mint az x_2.

$$\dot{x_1} = x_2$$

Hasonlóan az előzőhöz:

$$\dot{x_2} = x_3$$

Mivel x_3 nem más mint az $\ddot{y}$, ezért annak deriváltja az $\dddot{y}$, amit első lépésben kifejeztünk:

$$\dot{x_3} = \frac{-3}{4} \cdot \ddot{y} + \frac{-7}{3} \cdot y + 0 \cdot \dot{y} + \frac{4}{7} \cdot u$$

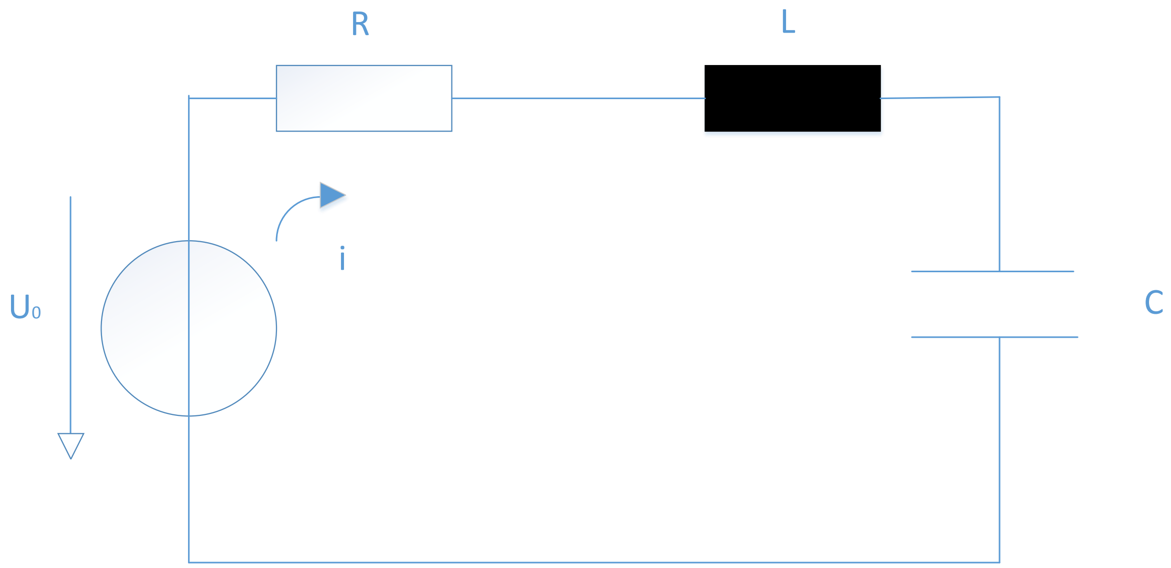
Végül felírjuk mátrixos alakban az egyenletrendszert, ahol a mátrix sorai az új változók együtthatóit tartalmazzák az előbb felírt egyenletek alapján.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$v = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

Pl2.:

Írja fel az alábbi fizikai rendszer állapot egyenleteit, ha a vizsgált jel a kondenzátoron eső feszültség!



Első lépésben felírjuk a rendszer hurok egyenletét.

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt - U_0 = 0$$

$$U_0 = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt$$

Kifejezzük a legmagasabb rendű deriváltat:

$$L \cdot \frac{di}{dt} = U_0 - R \cdot i - \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt \qquad /: L$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} - \frac{R}{L} \cdot i - \frac{1}{C \cdot L} \cdot \int i \, dt$$

Új állapotváltozókat vezetünk be a legalacsonyabb rendű deriválttól haladva a legmagasabbig.

$$x_1 = \int i \, dt$$

$$x_2 = i$$

Felírjuk azok deriváltjait:

$$\dot{x_1} = \left(\int i\,dt\right)' = i = x_2$$

$$\dot{x_2} = (i)' = \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{L} - \frac{R}{L} \cdot i - \frac{1}{C \cdot L} \cdot \int i\,dt = \frac{U_0}{L} - \frac{R}{L} \cdot x_2 - \frac{1}{C \cdot L} \cdot x_1$$

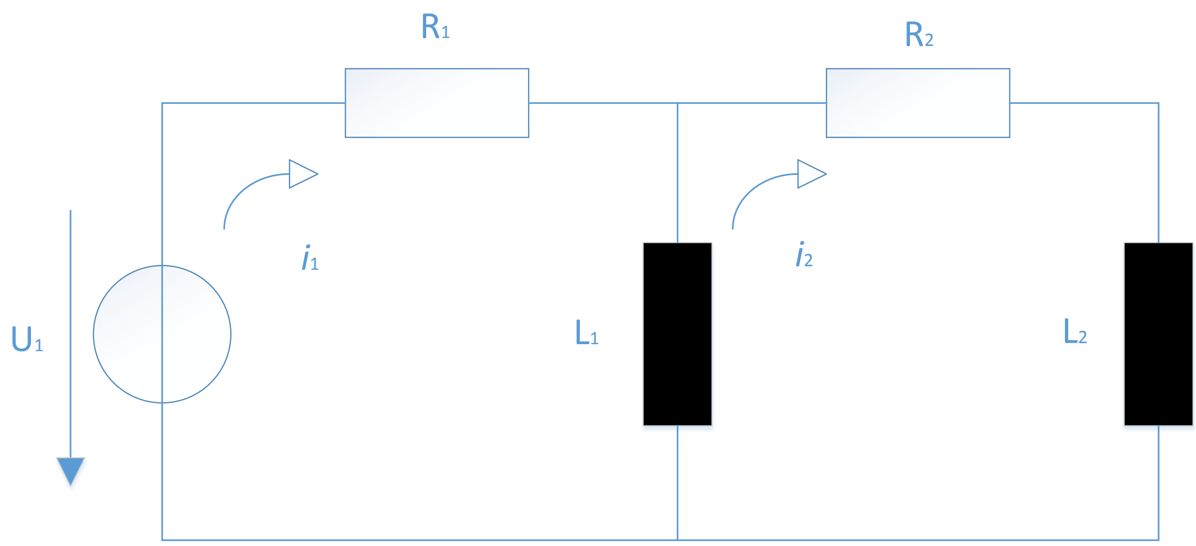
Utolsó lépésben felírjuk a mátrixos alakot.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R}{L} & -\frac{1}{C \cdot L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot U_0$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot U_0$$

Pl3.:

Írja fel az alábbi rendszer állapot egyenleteit!



Pl4.:

Írja fel az alábbi rendszer állapot egyenleteit!

$$4 \cdot \ddot{y} + 5 \cdot \dot{y} + 2 \cdot y = 6 \cdot u$$

Bode diagram készítése:

pl1.:

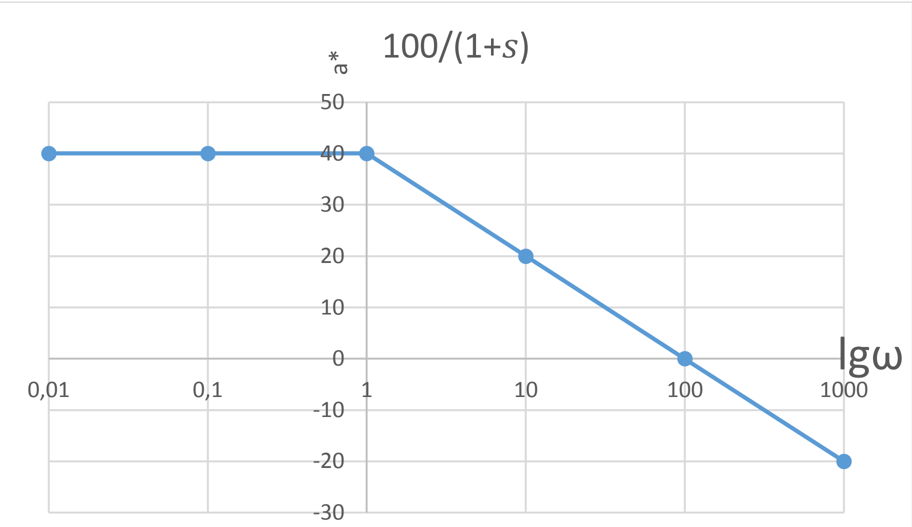
Rajzolja meg az alábbi rendszer Bode diagramjait és határozza meg a fázis, amplitúdó tartalékot!

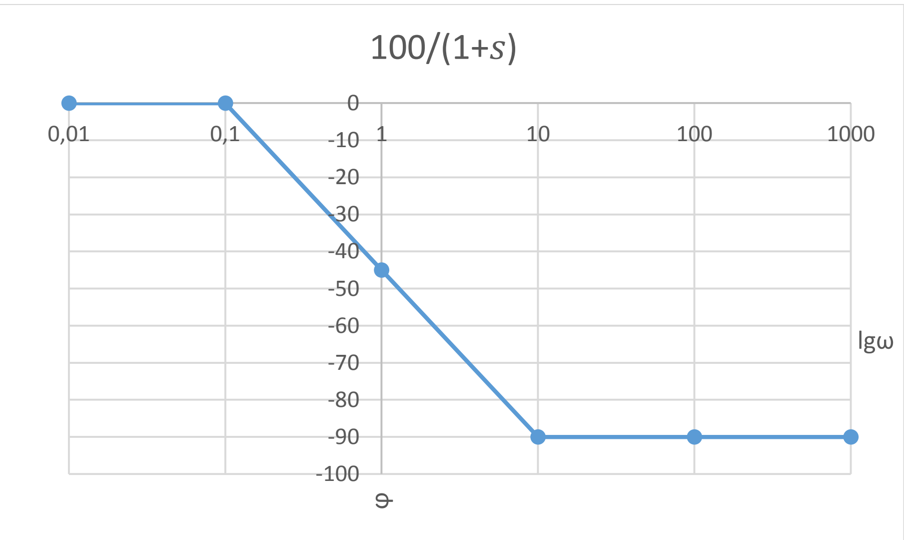
$$Y(s) = \frac{100}{(1+s)(1+0{,}1s)}$$

Szétbontjuk a kifejezést alaptagok szorzatára:

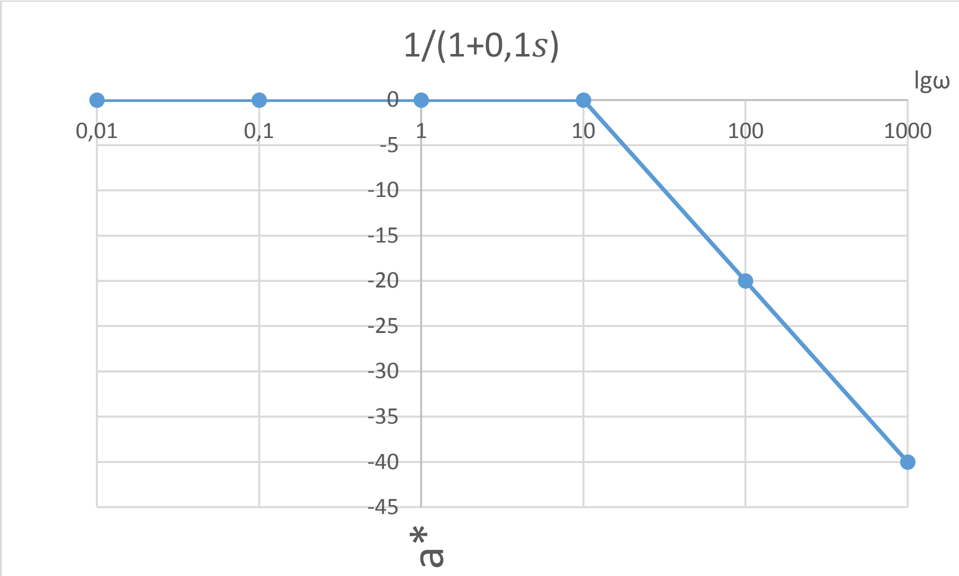
$$Y(s) = \frac{100}{1+s} \cdot \frac{1}{1+0{,}1s}$$

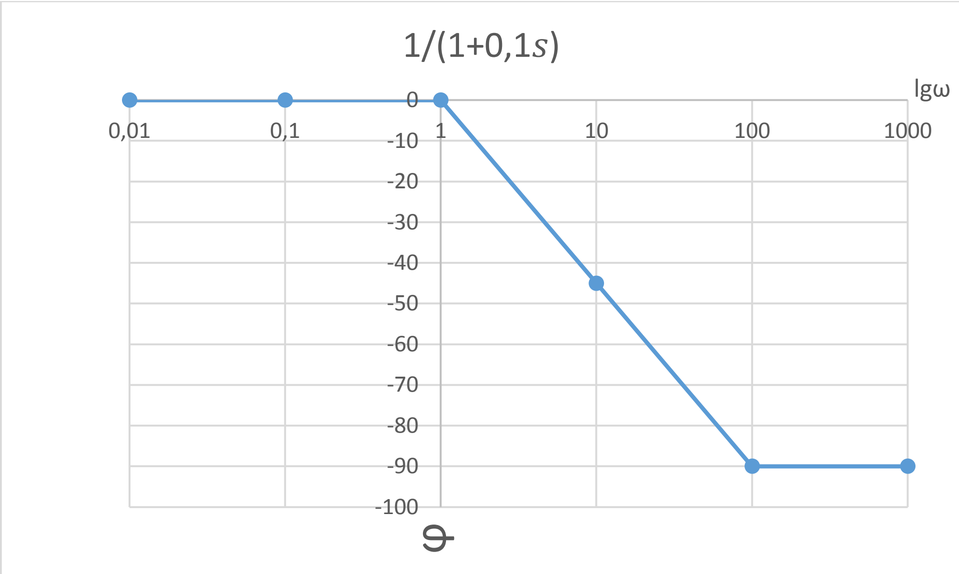
A $\frac{100}{1+s}$ tag amplitúdó és fázis diagramjai:



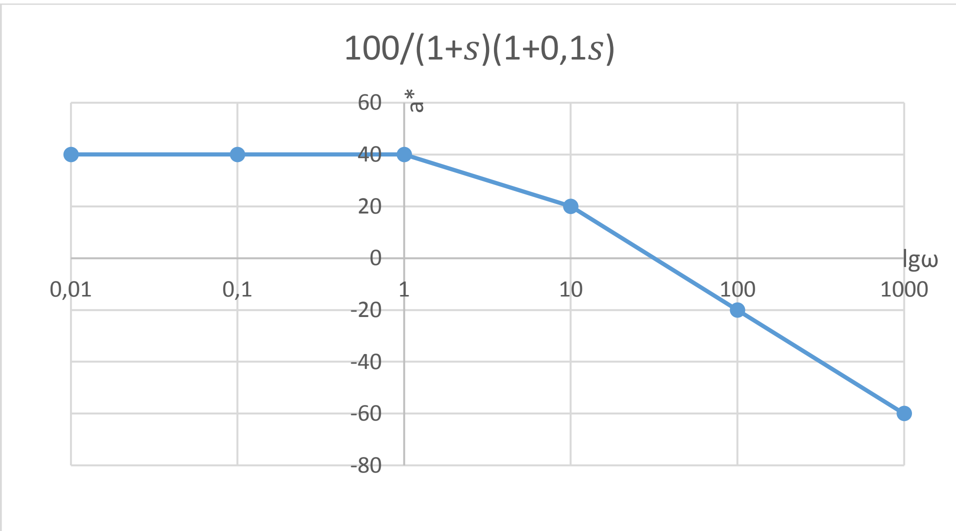


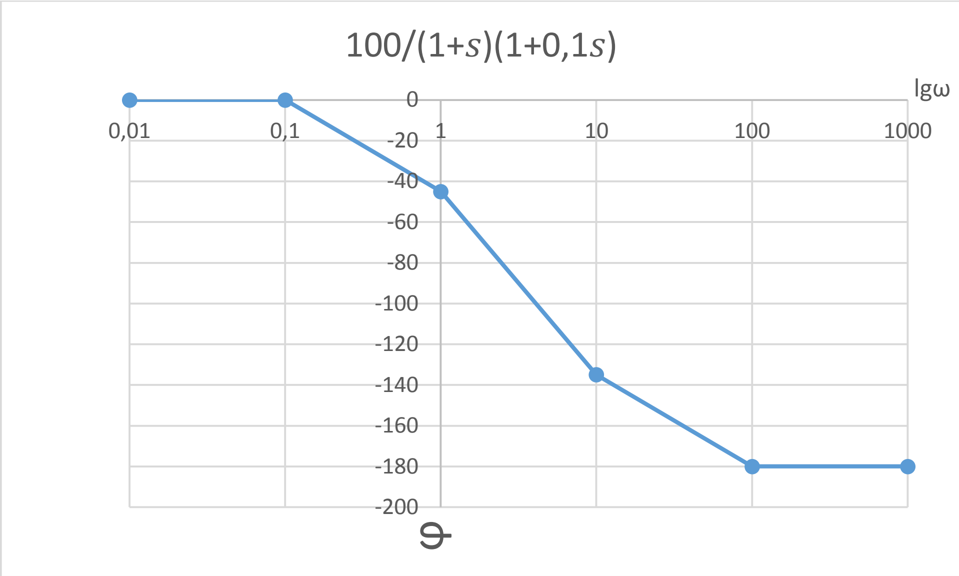
A $\frac{1}{1+0{,}1s}$ tag amplitúdó és fázis diagramja:





Az amplitúdó és fázis diagramok egyszerű pontonkénti összeadásával állíthatjuk elő az eredő amplitúdó és fázis diagramot:





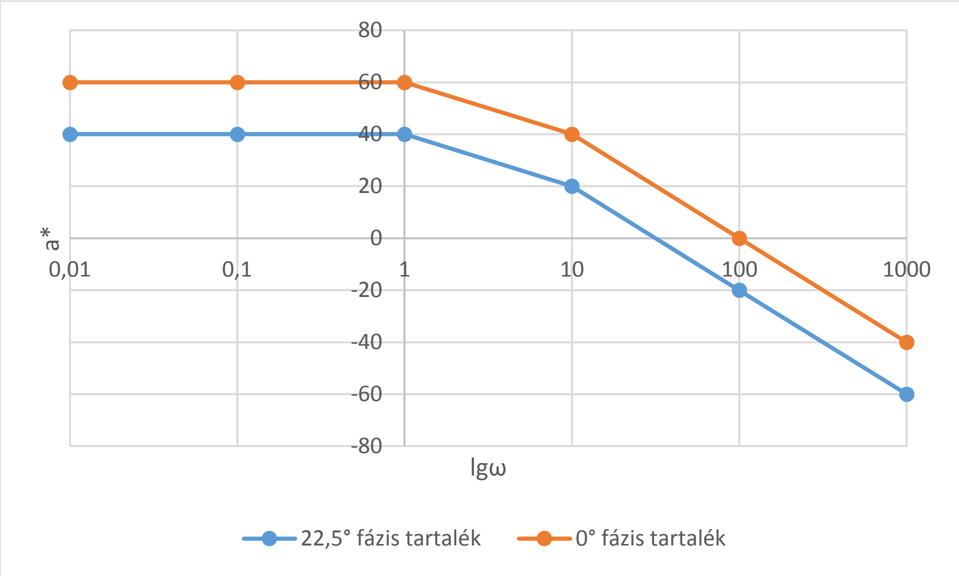
Ha a vágási frekvenciánál a fázis érték kisebb, mint -180° akkor a rendszert stabilnak tekintjük. A vágási frekvencia az a pont, ahol az amplitúdó diagram metszi az ω tengelyt .A vágási frekvenciához tartozó fázis szög (ha az nagyobb, mint -180°) és a -180° közötti távolságot fázis tartaléknak nevezzük. A -180° foknál lévő erősítési tényező és az ω tengely közti különbséget pedig amplitúdó tartaléknak nevezzük ha az negatív.

Jelen esetben a fázis tartalék 22,5° az amplitúdó tartalék pedig 20dB.

Milyen kompenzáló tagot kell sorosan beiktatni, hogy a fázis tartalék 0° legyen?

Ha azt szeretném, hogy a fázis tartalékom 0° legyen, ahhoz meg kell növelnem a vágási frekvenciát, azaz feljebb tolnom az erősítés diagramját egy adott értékkel.

-180°nál a frekvencia 100Hz, ahhoz hogy a metszéspont 100Hz-nél legyen, 20 egységgel kell feljebb tolnunk az amplitúdó diagramot:



Az így kapott új erősítés kiszámítása:

$a^* = 20 \cdot \log A_p$

$60 = 20 \cdot \log x \cdot 100 \qquad /:20$

$3 = \log x \cdot 100$

$1000 = x \cdot 100$

$x = 10$

Tehát 10es nagyságú arányost tagot kell bekötni, hogy 0° legyen a fázistartalék. Mivel ez tiszta arányos tag, ezért a fázis diagram nem változik.

Pl2.:

Rajzolja meg az alábbi rendszer Bode diagramját, határozza meg az amplitúdó és fázis tartalékot!

$$Y(s) = \frac{1 + 10 \cdot s}{1 + 0{,}1 \cdot s}$$

Pl3.:

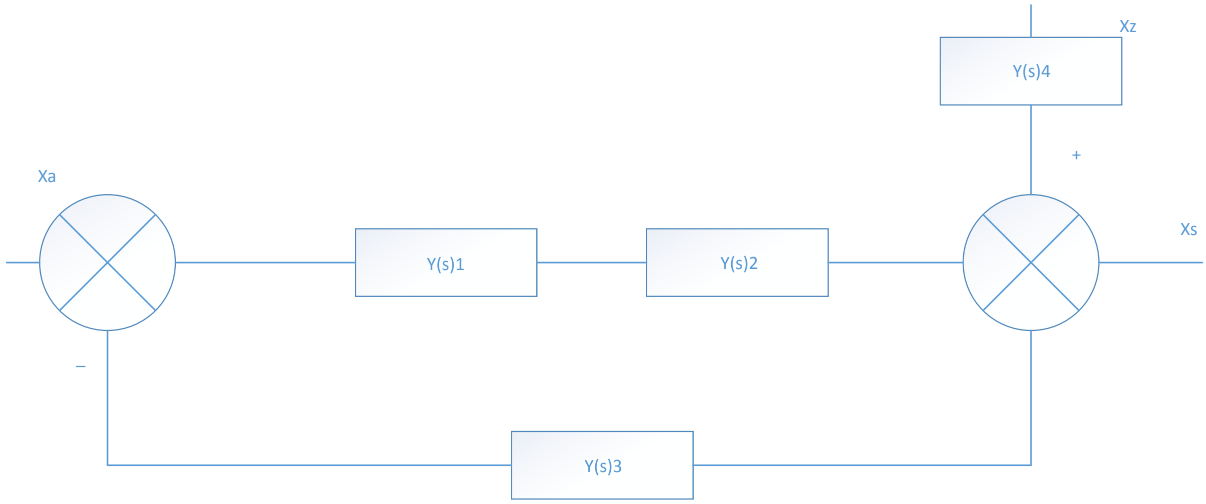
Rajzolja meg az alábbi rendszer Bode diagramját, határozza meg az amplitúdó és fázis tartalékot!

$$Y(s) = \frac{100}{s \cdot (1 + s)}$$

<u>Szabályozási eltérés számítása:</u>

pl1.:

Határozza meg a kimenő jel nagyságát állandósult állapotban!



$$Y_1(s) = 10;\ Y_2(s) = \frac{0.9}{1+9s};\ Y_3(s) = \frac{A_v}{1+s};\ Y_4(s) = \frac{0.2}{1+2s}$$

$$x_a = 10;\ x_z = 6;\ A_v = 2$$

Mivel a zavarásban és a rendszerben sincs integráló tag, ezért a szabályozási eltérést a következőképpen számíthatjuk:

$$\Delta x_s = \frac{1}{1+K} \cdot x_A - \frac{A_z \cdot x_z}{1+K}$$

ahol:

$$x_a - A_v \cdot x_A = 0 \qquad x_A = \frac{x_a}{A_v} = \frac{10}{2} = 5$$

a felnyitott kör erősítési tényezője:

$$K = 10 \cdot 0.9 \cdot 2 = 18$$

tehát:

$$\Delta x_s = \frac{1}{1+18} \cdot 5 - \frac{0.2 \cdot 6}{1+18} = \frac{2}{19}$$

Tehát a kimenő jel:

$$x_s = x_A - \Delta x_s = 5 - {}^{2}\!/_{19} = 4\frac{17}{19}$$

Ruth-Hurwitzh féle stabilitási kritérium:

Ennél a módszernél a felnyitott kört vizsgáljuk meg. Az alap feltevés:

$$1 + Y(s)_{felnyitott} = 0$$

Egyszerűsítésekkel az alábbi alakra hozható az egyenlet:

$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + a_{n-2} \cdot s^{n-2} + \cdots + a_0 = 0$$

A kapott együtthatókat az alábbi szabály szerint egy determinánsba helyezzük, majd kifejtjük:

$$det\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \dots \dots . . & 0 \\ a_n & a_{n-2} \dots \dots . . & 0 \\ 0 & a_{n-1} \dots \dots \dots & a_0 \end{vmatrix} > 0 \; a\ rendszer\ stabil!$$

pl1.:

Határozza meg, mekkora „K” paraméter esetén van a rendszer a stabilitás határán!

Legyen Y(s)= $\frac{K}{(T \cdot s+1)^3}$

$$1 + \frac{K}{(T \cdot s + 1)^3} = 0$$

$$\frac{K + (T \cdot s + 1)^3}{(T \cdot s + 1)^3} = 0$$

$$\frac{T^3 \cdot s^3 + 3 \cdot T^2 \cdot s^2 \cdot 1 + 3 \cdot T \cdot s \cdot 1^2 + 1^3 + K}{(T \cdot s + 1)^3} = 0$$

$$det\begin{vmatrix} 3 \cdot T^2 & K + 1^3 & 0 \\ T^3 & 3 \cdot T & 0 \\ 0 & 3 \cdot T^2 & 1^3 + K \end{vmatrix} > 0$$

$[9 \cdot T^3 - T^3 \cdot (K + 1^3)] \cdot (K + 1^3)$>0

Egy szorzat akkor 0 ha valamelyik tagja 0 ezért $(K + 1^3)$el lehet egyszerűsíteni

$9 \cdot T^3 - T^3 \cdot (K + 1^3) > 0$

$9 \cdot T^3 - T^3 \cdot (K + 1) > 0$

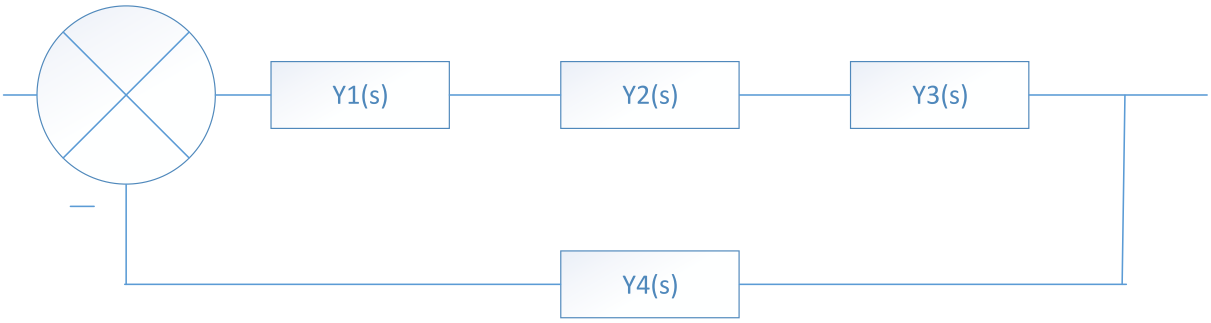
Ki emelünk a szorzatból T^3t.

$9 - K - 1 > 0$

Ha K<8 a rendszer stabil!

Pl2.:

Határozza meg, hogy az alábbi rendszer stabil-e?



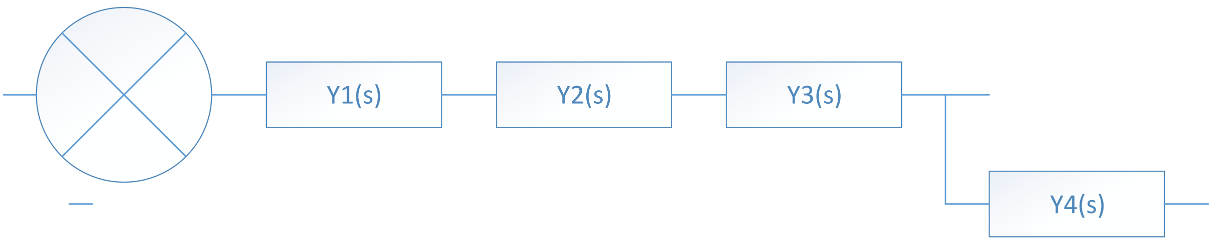
$$Y_1(s) = \frac{3}{s}$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{1 + s}$$

$$Y_3(s) = 2$$

$$Y_1(s) = \frac{0{,}1}{1 + 5 \cdot s}$$

Először állítsuk elő a felnyitott kört.



Majd képezzük a felnyitott kör eredőjét. Amint láthatjuk, a rendszer csak soros tagokból áll, ezért az eredő a tagok szorzata lesz.

$$Y_{felnyitott}(s) = \frac{0{,}1}{1+5\cdot s}\cdot 2\cdot\frac{1}{1+s}\cdot\frac{3}{s} = \frac{0{,}6}{(1+5\cdot s)\cdot(1+s)\cdot s}$$

$$Y_{felnyitott}(s) + 1 = 0$$

$$\frac{0{,}6}{(1+5\cdot s)\cdot(1+s)\cdot s} + 1 = 0$$

$$\frac{0{,}6 + (1+5\cdot s)\cdot(1+s)\cdot s}{(1+5\cdot s)\cdot(1+s)\cdot s} = 0$$

Karakterisztikus egyenlet:

$$5\cdot s^3 + 6\cdot s^2 + 1\cdot s + 0{,}6 = 0$$

Determináns képzése:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0{,}6 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0{,}6 \end{vmatrix} > 0$$

$$0{,}6\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0{,}6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

$$0{,}6\cdot(6-3) = 1{,}8 > 0$$

Tehát a rendszer stabil!

Pl3.:

Határozza meg azt a K_{krit} értéket, amelynél a rendszer a stabilitás határán van!

$$Y(s) = \frac{1}{1+3\cdot s^2}\cdot\frac{K_{krit}}{5\cdot s}$$

Pl4.:

Határozza meg, hogy az alábbi rendszer stabil-e?

$$Y(s) = \frac{10}{s\cdot(1+3\cdot s)(1+5\cdot s)}$$

<u>Mintavételezett rendszerek:</u>

Ismertek az alábbi összefüggések:

$$Z\{1(t)\} = \frac{z}{z-1}; \qquad Z\left\{a^{n \cdot t^0}\right\} = \frac{z}{z-a} \; ahol \; a < 1$$

Pl1.:

Határozza meg az alábbi rendszer minimum első három kimenő jelét inverz „Z" transzformáció segítségével, ha a bemenő jel dirac delta!

$$Y(z) = \frac{3 \cdot z^2}{(z-1) \cdot (z-0{,}5)}$$

Inverz „Z" transzformációnál hasonlóan az inverz Laplace transzformációhoz, azzal kezdjük, hogy alaptagok összegére bontjuk szét a rendszert, már ha ez lehetséges. Ha nem, akkor más módszerrel kell próbálkozni.

$$\frac{3 \cdot z^2}{(z-1) \cdot (z-0{,}5)} = \frac{A \cdot z}{z-1} + \frac{B \cdot z}{z-0{,}5}$$

Parciális törtekre bontás szabálya alapján meghatározhatók az új szorzók.

$$\frac{A \cdot z}{z-1} + \frac{B \cdot z}{z-0{,}5} = \frac{A \cdot z^2 - 0{,}5 \cdot A \cdot z + B \cdot z^2 - B \cdot z}{(z-1) \cdot (z-0{,}5)}$$

Összehasonlítjuk a kapott tört számlálójában lévő kifejezéseket az eredeti tört számlálójában lévő kifejezésekkel.

Először megvizsgáljuk a négyzetes tagok szorzóját.

$$3 = A + B$$

$$B = 3 - A$$

Az első hatványon lévő tagok szorzója:

$$-0{,}5 \cdot A - B = 0$$

$$-0{,}5 \cdot A - 3 + A = 0$$

$$A = 6$$

$$B = -3$$

Behelyettesítjük a szorzókat.

$$\frac{A \cdot z}{z-1} + \frac{B \cdot z}{z-0{,}5} = \frac{6 \cdot z}{z-1} - \frac{3 \cdot z}{z-0{,}5}$$

Elvégezzük az inverz „Z" transzformációt.

$$Z^{-1}\left(\frac{6 \cdot z}{z-1} - \frac{3 \cdot z}{z-0{,}5}\right) = 6 \cdot Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) - 3 \cdot Z^{-1}(\frac{z}{z-0{,}5})$$

$$6 \cdot Z^{-1}\left(\frac{z}{z-1}\right) - 3 \cdot Z^{-1}\left(\frac{z}{z-0{,}5}\right) = 6 \cdot \{1; 1; 1\} - 3 \cdot \{0{,}5^0; 0{,}5^1; 0{,}5^2\} =$$

$$\{6-3;\ 6-1{,}5; 6-0{,}75\}$$

$$\{6-3;\ 6-1{,}5; 6-0{,}75\} = \{3; 4{,}5; 5{,}25\}$$

$$y(n \cdot t_0) = \{3; 4{,}5; 5{,}25\}\ n \in N^+$$

Oldjuk meg az előző példát polinom osztás segítségével!

$$Y(z) = \frac{3 \cdot z^2}{(z-1) \cdot (z-0{,}5)} = \frac{3 \cdot z^2}{z^2 - 1{,}5 \cdot z + 0{,}5}$$

$$3 \cdot z^2\ :\ z^2 - 1{,}5 \cdot z + 0{,}5 = \mathbf{3 \cdot z^0 + 4{,}5 \cdot z^{-1} + 5{,}25 \cdot z^{-2}}$$

$$-(3 \cdot z^2 - 4{,}5 \cdot z + 1{,}5)$$

$$4{,}5 \cdot z - 1{,}5$$

$$-(4{,}5 \cdot z - 6{,}75 - 2{,}25 \cdot z^{-1}$$

$$5{,}25 + 2{,}25 \cdot z^{-1}$$

A kimenő jel a kapott kifejezés szorzó tényezői:

$$y(n \cdot t_0) = \{3; 4{,}5; 5{,}25\}\ n \in N^+$$

Oldjuk meg az előző példát differencia módszer segítségével!

Az impulzus átviteli függvény a ki és a bemenő jel hányadosa, tehát felírhatjuk a következő alakot:

$$\frac{3 \cdot z^2}{z^2 - 1{,}5 \cdot z + 0{,}5} = \frac{x_{ki}(z)}{x_{be}(z)} = Y(z)$$

Keresztbe szorzunk:

$$z^2 \cdot x_{ki}(z) - 1{,}5 \cdot z \cdot x_{ki}(z) + 0{,}5 \cdot x_{ki}(z) = 3 \cdot z^2 \cdot x_{be}(z)$$

Átírjuk differenciákká a kapott alakot az „n”edik hatvány az „n”edik időpillanatnak felel meg. Mivel a bemenő jel dirac delta ezért azt mondhatjuk hogy $x_{be}(0) = 1$!

$$x_{ki}(k+2) - 1{,}5 \cdot x_{ki}(k+1) + 0{,}5 \cdot x_{ki}(k) = 3 \cdot x_{be}(k+2)$$

Vizsgáljuk meg a rendszert a $k = -2$ esetére.

$$x_{ki}(0) - 1{,}5 \cdot x_{ki}(-1) + 0{,}5 \cdot x_{ki}(-2) = 3 \cdot x_{be}(0)$$

Mivel a rendszer kezdeti állapotában a kimenő jel értéke zérus, ezért az előtte lévő állapotokban is zérusnak feltételezzük a rendszer kimenő értékét.

Tehát:

$$x_{ki}(0) \quad - \quad 0 \quad + \quad 0 = 3 \cdot x_{be}(0) = 3 \cdot 1$$

$$\boldsymbol{x_{ki}(0) = 3}$$

Vizsgáljuk meg a rendszert a $k = -1$ esetére.

$$x_{ki}(1) - 1{,}5 \cdot x_{ki}(0) \quad + \quad 0 = 3 \cdot x_{be}(1)$$

Mivel a dirac deltához csak a zérus időpillanatban rendelünk értéket, ezért az attól különböző időpillanatokban az értéke zérus, azaz: $x_{be}(1; 2; \dots) = 0$

$$x_{ki}(1) - 1{,}5 \cdot x_{ki}(0) \quad + \quad 0 = \quad 0$$

$$x_{ki}(1) - 1{,}5 \cdot 3 = 0$$

$$\boldsymbol{x_{ki}(1) = 4{,}5}$$

Vizsgáljuk meg a rendszert a $k = 0$ esetére.

$$x_{ki}(2) - 1{,}5 \cdot x_{ki}(1) + 0{,}5 \cdot x_{ki}(0) = 3 \cdot x_{be}(2)$$

$$x_{ki}(2) - 1{,}5 \cdot 4{,}5 + 0{,}5 \cdot 3 = 0$$

$$\boldsymbol{x_{ki}(2) = 5{,}25}$$

A végeredmény ismét:

$y(n \cdot t_0) = \{3; 4{,}5; 5{,}25\}\ n \in N^+$

Pl2.:

Határozza meg az alábbi rendszer legalább első három kimenő jelét!

$$Y(z) = \frac{2 \cdot z^2}{z^2 - 1{,}8 \cdot z + 0{,}8}$$

Pl3.:

Határozza meg az alábbi rendszer legalább első három kimenő jelét!

$$Y(z) = \frac{2 \cdot z^2}{z^2 - 1{,}1 \cdot z + 0{,}1}$$

Felhasznált irodalom:

[1] Automatika mérnököknek – Miskolci Egyetem - Automatika tanszék, Tankönyvkiadó, Budapest 1992

[2] Szabályozás technika, Budapesti Műszaki Egyetem – Villamosmérnöki és Informatikai kar, Dr. Tuschák Róbert, Műegyetemi Kiadó 1994

[3] Fejezetek a szabályozás technikából – Állapot egyenletek, Dr. Csáki Frigyes, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1973